姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

# 第九届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷

(数学类, 2018年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

| 题号 | 一 | 二 | 三 | 四 | 五 | 六 | 总分 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 满分 | 20 | 15 | 15 | 20 | 15 | 15 | 100 |
| 得分 | | | | | | | |

注意: 1. 本试卷共六大题.

2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

| | |
|---|---|
| 得分 | |
| 评阅人 | |

## 一、 (本题 20 分, 每小题各5分)填空题

(1) 设实方阵 $H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix}$，$n\geq 1$，其中$I$是与$H_n$同阶的单位方阵．则$\operatorname{rank}(H_4)=$______________.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=$______________.

(3) 设$\Gamma$为空间曲线$\begin{cases}x=\pi\sin\dfrac{t}{2},\\ y=t-\sin t,\\ z=\sin 2t\end{cases}$，$t\in[0,\pi]$．则第二型曲线积分$\displaystyle\int_\Gamma e^{\sin x}\Big(\cos x\cos y\,dx-\sin y\,dy\Big)+\cos z\,dz=$______________.

(4) 设二次型$f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$的矩阵$A$为$\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&\cdots&a&1&a\\a&a&\cdots&a&1\end{pmatrix}$,

其中$n>1, a\in\mathbb{R}$. 则$f$在正交变换下的标准形为______________________________.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系下，设有椭球面

$$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0$$

及$S$外部一点$A(x_0,y_0,z_0)$，过$A$点且与$S$ 相切的所有直线构成锥面$\Sigma$. 证明：存在平面$\Pi$，使得交线$S\cap\Sigma=S\cap\Pi$；同时求出平面$\Pi$的方程.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

三、（本题 15 分）设$A,B,C$均为$n$阶复方阵，且满足

$$AB-BA=C,\quad AC=CA,\quad BC=CB.$$

1. 证明：$C$是幂零方阵；
2. 证明：$A,B,C$同时相似于上三角阵；
3. 若$C\neq 0$, 求$n$的最小值.

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

四、（本题20分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1) \geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\, dx \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\, dx + \int_0^1 |f''(x)|\, dx.$$

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考生座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

| 得分 | |
|---|---|
| 评阅人 | |

五、（本题15分）设 $\alpha \in (1,2)$, $(1-x)^{\alpha}$ 的 Maclaurin 级数为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $n \times n$ 实常数矩阵 $A$ 为幂零矩阵, $I$ 为$n$ 阶单位阵. 设矩阵值函数 $G(x)$ 定义为

$$G(x) \equiv \Big(g_{ij}(x)\Big) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k, \qquad 0 \leqslant x < 1.$$

试证对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 积分 $\displaystyle\int_0^1 g_{ij}(x)\,dx$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$.

| 得分 | |
| --- | --- |
| 评阅人 | |

六、（本题15分）有界连续函数$g(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足$1<g(t)<2$. $x(t)(t\in\mathbb{R})$是方程$\ddot{x}(t)=g(t)x$的单调正解. 求证：存在常数$C_2>C_1>0$满足

$$C_1x(t)<|\dot{x}(t)|<C_2x(t), t\in\mathbb{R}.$$