专业:________ 考生座位号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

第九届中国大学生数学竞赛决赛一、二年级试卷答案

(数学类, 2018年3月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 180 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

注意: 1. 本试卷共6大题.

2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分每小题各 5 分)填空题

(1) 设实方阵$H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$，$H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix}$，$n\ge 1$，其中$I$是与$H_n$同阶的单位方阵．则$\operatorname{rank}(H_4)=\underline{10}$.

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=\underline{\frac{1}{2}}$.

(3) 设 Γ 为空间曲线 $\begin{cases}x=\pi\sin\dfrac{t}{2},\\ y=t-\sin t,\\ z=\sin 2t\end{cases}$ 从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 的一段. 则第二型曲线积分

$$\int_\Gamma e^{\sin x}\Big(\cos x\cos y\,dx-\sin y\,dy\Big)+\cos z\,dz=\underline{-2}.$$

(4) 设二次型$f(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$的矩阵$A$为$\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&\cdots&a&1&a\\a&a&\cdots&a&1\end{pmatrix}$,

其中$n>1, a\in\mathbb{R}$. 则f在正交变换下的标准形为$\underline{((n-1)a+1)y_1^2-(a-1)y_2^2-\cdots-(a-1)y_n^2}$.

参考答案. (1)H_n是$m=2^n$阶对称方阵，存在正交方阵P使得$P^{-1}H_nP=D$是对角方阵．从而，$H_{n+1}=\begin{pmatrix}P & O\\ O & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & I\\ I & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & O\\ O & P\end{pmatrix}^{-1}$与$\begin{pmatrix}D & I\\ I & D\end{pmatrix}$相似．设$H_n$的所有特征值是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，则$H_{n+1}$的所有特征值是$\lambda_1+1,\lambda_1-1,\lambda_2+1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_m+1,\lambda_m-1$．利用数学归纳法容易证明：$H_n$的所有不同特征值为$\{n-2k\mid k=0,1,\cdots,n\}$，并且每个特征值$n-2k$的代数重数为$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$．因此，$\operatorname{rank}(H_4)=2^4-C_4^2$．

方法二：用分块矩阵初等变换直接计算即可.

(2)**注: 利用 Lagrange 中值定理可以简化计算**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

(3) -2.

(4) 只需求出A 的全部特征值即可. 显然$A+(a-1)I$ 的秩$\leqslant 1$. 故 $A+(a-1)I$ 的零空间的维数为$\geqslant n-1$, 从而可设A 的n 个特征值为

$$\lambda_1=1-a,\lambda_2=1-a,\cdots,\lambda_{n-1}=1-a,\lambda_n.$$

注意到 $trA=n$, 故得$\lambda_n=(n-1)a+1$. 结果，f在正交变换下的标准形为$((n-1)a+1)y_1^2-(a-1)y_2^2-\cdots-(a-1)y_n^2$.

姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考生座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系下，设有椭球面

$$S: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \quad a,b,c>0$$

及S外部一点$A(x_0,y_0,z_0)$，过A点且与S 相切的所有直线构成锥面Σ. 证明：存在平面Π，使得交线$S\cap\Sigma=S\cap\Pi$；同时求出平面Π的方程.

解：解法一：

因为A在S的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0. \tag{1}$$

对于任意的$M(x,y,z)\in S\cap\Sigma$，连接A,M的直线记为l_M，其参数方程可设为

$$\tilde{x}=x+t(x-x_0), \quad \tilde{y}=y+t(y-y_0), \quad \tilde{z}=z+t(z-z_0), \quad -\infty<t<+\infty. \tag{2}$$

代入椭球面的方程得

$$\frac{(x+t(x-x_0))^2}{a^2}+\frac{(y+t(y-y_0))^2}{b^2}+\frac{(z+t(z-z_0))^2}{c^2}=1.$$

整理得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+t^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-2\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)$$
$$+2t\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)=1.$$

(6分)

因为点M在椭球面S上，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 所以上式化为

$$t^2\left(1+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-2\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)+2t\left(1-\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)=0. \tag{3}$$

由于l_M与S在M点相切，方程(3)有一个二重根$t=0$. 故有

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0. \tag{4}$$

此时由(1)知，方程(3)的首项系数化为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0.$$

特别地，(4)的系数均不为零因而是一个平面方程，确定的平面记为Π. 上述的推导证明了$S\cap\Sigma\subset\Pi$，从而证明了$S\cap\Sigma\subset S\cap\Pi$.

(12分)

反之，对于截线$S\cap\Pi$上的任一点$M(x,y,z)$，由(3)、(4)两式即知，由A、M两点确定的直线l_M一定在点M与S相切. 故由定义，l_M在锥面Σ 上. 特别地，$M\in\Sigma$. 由M的任意性，$S\cap\Pi\subset S\cap\Sigma$.

结论得证. (15分)

解法二：

因为A在S的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}>1>0. \tag{5}$$

对于任意的$M(x_1,y_1,z_1)\in S\cap\Sigma$，椭球面$S$在$M$点的切平面方程可以写为

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z-1=0.$$

因为连接M和A两点的直线是S在点M的切线，所以A点在上述切平面上. 故

$$\frac{x_1}{a^2}x_0+\frac{y_1}{b^2}y_0+\frac{z_1}{c^2}z_0-1=0.$$

于是，点$M(x_1,y_1,z_1)$在平面

$$\Pi:\ \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$$

上，即有$M\in S\cap\Pi$. (12分)

反之，对于任意的$M(x_1,y_1,z_1)\in S\cap\Pi$，有

$$\frac{x_0}{a^2}x_1+\frac{y_0}{b^2}y_1+\frac{z_0}{c^2}z_1-1=0.$$

则S在M点的切平面

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z-1=0$$

通过$A(x_0,y_0,z_0)$点，因而M,A的连线在点M和椭球面S相切，它在锥面Σ 上. 故$M\in S\cap\Sigma$.

结论得证. (15分)

专业:

考生座位号:

所在院校:

准考证号:

姓名:

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、（本题 15 分）设A, B, C均为n阶复方阵，且满足

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB.$$

1. 证明：C是幂零方阵；
2. 证明：A, B, C同时相似于上三角阵；
3. 若$C \neq 0$, 求n的最小值.

证明.

1. 设C的不同特征值为$\lambda_1, \dots, \lambda_k$, 不妨设$C$具有Jordan标准型：$C = diag(J_1, \dots, J_k)$, 其中$J_i$为特征值$\lambda_i$对应的Jordan块. 对矩阵$B$做与$C$相同的分块，$B = (B_{ij})_{k\times k}$. 由$BC = CB$可得$J_iB_{ij} = B_{ij}J_j$, $i, j = 1, 2, \dots, k$. 这样对任意多项式p有$p(J_i)B_{ij} = B_{ij}p(J_j)$. 取$p$为$J_i$的最小多项式，则得$B_{ij}p(J_j) = 0$. 当$i \neq j$时，$p(J_j)$可逆，从而$B_{ij} = 0$. 因此，$B = diag(B_{11}, \dots, B_{kk})$. 同理，$A = diag(A_{11}, \dots, A_{kk})$. 由 $AB - BA = C$得$A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii} = J_i$, $i = 1, \dots, k$. 故$Tr(J_i) = Tr(A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii}) = 0$, $i = 1, 2, \dots, k$. 从而$\lambda_i = 0$, 即C为幂零方阵. （5分）
2. 令$V_0 = \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, Cv = 0\}$，显然$V_0$ 非空. 对任意$v \in V_0$, 由于$C(Av) = A(Cv) = 0$, 因此$AV_0 \subseteq V_0$. 同理，$BV_0 \subseteq V_0$. 于是存在$0 \neq v \in V_0$和$\lambda \in \mathbb{C}$使得$Av = \lambda v$。记$V_1 = \{v \,|\, Av = \lambda v, v \in V_0\} \subseteq V_0$, 由$AB - BA = C$知，对任意$u \in V_1$, $A(Bu) = B(Au) + Cu = \lambda Bu$. 故 $BV_1 \subseteq V_1$. 从而存在$0 \neq v_1 \in V_1$及$\mu \in \mathbb{C}$使得$Bv_1 = \mu v_1$, 同时有$Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Cv_1 = 0$. 将v_1扩充为$\mathbb{C}^n$ 的一组基$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 令$P = (v_1, \dots, v_n)$，则
$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad BP = P\begin{pmatrix} \mu & y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad CP = P\begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}.$$
其中A_1, B_1, C_1 为$n-1$ 阶复方阵且满足$A_1B_1 - B_1A_1 = C_1$, $A_1C_1 = C_1A_1$, $B_1C_1 = C_1B_1$. 由数学归纳法即可得知, A, B, C同时相似于上三角阵. （10分）
3. 当$n \geq 3$时，取$A = E_{12}$, $B = E_{23}$, $C = E_{13}$，则A, B, C满足题意。对$n = 2$, 不妨设 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则有$AC = CA$得$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$. 类似由有$BC = CB$得$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$. 于是$AB - BA = 0$，这与$AB - BA = C$矛盾！故满足$C \neq 0$的最小$n$为3.

（15分）

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1)\geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f''(x)|\,dx.$$

解答 设 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(x_1)|$, $m=\min\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(x_0)|$. 则有

$$\int_0^1 |f''(x)|\,dx \geqslant \left|\int_{x_0}^{x_1} f''(x)\,dx\right| = |f'(x_1)-f'(x_0)| \geqslant M-m.$$

另一方面, 有 $\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant M\int_0^1 dx = M$. 故, 只需证明

$$m \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

(10分)

若 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 中有零点, 则 $m=0$. 此时 (2) 显然成立. 现在假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点, 不妨设 $f'(x)>0$, 因而 $f(x)$ 严格递增. 下面分两种情形讨论.

情形 1. $f(0)\geqslant 0$. 此时 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in[0,1])$. 由 $f'(x)=|f'(x)|\geqslant m$, 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(x)-f(0))\,dx + f(0)\\ &\geqslant \int_0^1 (f(x)-f(0))\,dx = \int_0^1 f'(\xi)x\,dx \geqslant \int_0^1 mx\,dx = \frac{1}{2}m\end{aligned}$$

故, (2) 成立.

情形 2. $f(0)<0$. 此时有 $f(1)\leqslant 0$, 根据 f 的递增性, 有 $f(x)\leqslant 0$ $(x\in[0,1])$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &= -\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(1)-f(x))\,dx - f(1)\\ &\geqslant \int_0^1 |f(1)-f(x)|\,dx = \int_0^1 |f'(\xi)|(1-x)\,dx \geqslant \int_0^1 m(1-x)\,dx = \frac{1}{2}m.\end{aligned}$$

此时, (2) 也成立.

注：由$f(0)f(1)\geqslant 0$, 可不妨设$f(x)\geqslant 0, x\in[0,1]$.可只考虑情形 1. (20分)

得分	
评阅人	

五、（本题15分）设 $\alpha \in (1,2)$, $(1-x)^{\alpha}$ 的 Maclaurin 级数为 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$, $n \times n$ 实常数矩阵 A 为幂零矩阵,I为单位阵. 设矩阵值函数 $G(x)$ 定义为

$$G(x) \equiv \Big(g_{ij}(x)\Big) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k, \qquad 0 \leqslant x < 1.$$

试证对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 积分 $\int_0^1 g_{ij}(x)\,dx$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$.

解答: 法 I. A 为幂零矩阵故有$A^n = 0$. 记 $f(x) = (1-x)^{\alpha}$, 当 $j > k$ 时, 记 $C_k^j = 0$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k (xI + A)^k = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k C_k^j x^{k-j} A^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} A^j, \qquad x \in (-1, 1). \end{aligned}$$

(6 分)

若有 $2 < m < n$ 使得 $A^m \neq 0$, $A^{m+1} = 0$, 则

$$\lim_{x \to 1^-} (1-x)^{m-\alpha} G(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-m+1)}{m!} A^m.$$

若 $m \geqslant 3$, 则 $m - \alpha > 1$, 此时, $\int_0^1 G(x)\,dx$ 发散. (11分)

另一方面, 若 $m \leqslant 2$, 则 $m - \alpha < 1$, 此时 $\int_0^1 G(x)\,dx$ 收敛.

总之, 使得对于 $1 \leqslant i, j \leqslant n$, 积分 $\int_0^1 g_{ij}(x)\,dx$ 均存在的充分必要条件是 $A^3 = 0$. (15分)

法 II. 用 Jordan 标准型直接表示出 $G(x)$.

得分	
评阅人	

六、（本题15分）有界连续函数$g(t):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$满足$1<g(t)<2$. $x(t),t\in\mathbb{R}$是方程$\ddot{x}(t)=g(t)x$的单调正解. 求证：存在常数$C_2>C_1>0$满足

$$C_1x(t)<|\dot{x}(t)|<C_2x(t),t\in\mathbb{R}.$$

证明一. 令$y=\frac{x'(t)}{x(t)}$, 则y 定号. 不妨$y(t)\geqslant 0$(否则考虑$t\to -t$). 下证结论对$C_1=1,C_2=\sqrt{3}$成立.

若存在$t_0,y(t_0)>\sqrt{3}\Rightarrow$

$$y'(t)=\frac{x''(t)x(t)-x'(t)^2}{x^2(t)}=g(t)-y^2<2-y^2<-1,t<t_0$$

则$y'(t)\mid_{t<t_0}<0$. (5分)

$\Rightarrow \frac{y'}{y^2-2}<-1,t<t_0$

$\Rightarrow \int_t^{t_0}\frac{y'ds}{y^2-2}<t-t_0,t<t_0$

$\Rightarrow t>t_0+\frac{1}{2\sqrt{2}}ln\frac{y(s)-2}{y(s)+2}\mid_t^{t_0}>-L>-\infty,L>0$为一个常数. 这与$y(t)$在$\mathbb{R}$上有定义矛盾. (10分)

若存在$t_0,y(t_0)<1$则$y'=g(t)-y^2>\delta>0,t<t_0$. 这$\Rightarrow\exists t_1<t_0,y(t_1)<0$. 矛盾. (15分)

证明二. 不妨设$x(t)$递增（否则考虑方程$\ddot{x}=g(-t)x$）. 注意到$\ddot{x}=g(t)x>0$ $\Rightarrow x(-\infty)=\dot{x}(-\infty)=0$. (5分)

$\dot{x}\ddot{x}=g(t)x\dot{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}\dot{x}(t)^2=\int_{-\infty}^t\dot{x}\ddot{x}ds=\int_{-\infty}^t g(s)x\dot{x}ds$

$\Rightarrow \int_{-\infty}^t x\dot{x}ds<\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2<2\int_{-\infty}^t x\dot{x}ds$

$\Rightarrow \frac{1}{2}x(t)^2<\frac{1}{2}\dot{x}(t)^2<x(t)^2$

$\Rightarrow x(t)<\dot{x}(t)<\sqrt{2}x(t).$ (15分)