第九届中国大学生数学竞赛决赛三、四年级试卷答案
(数学类, 2018年3月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意: 1. 前4大题是必答题, 再从 5–10大题中任选三题, 题号要填入上面的表中.
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

专业:　考生座位号:　所在院校:　准考证号:　姓名:

密封线　答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

(1) 设实方阵$H_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $H_{n+1}=\begin{pmatrix}H_n&I\\I&H_n\end{pmatrix}$, $n\geq 1$, 其中I是与H_n同阶的单位方阵. 则$\operatorname{rank}(H_4)=\underline{10}$.

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=\underline{\dfrac{1}{2}}$.

(3) 设Γ为空间曲线$\begin{cases}x=\pi\sin\dfrac{t}{2},\\ y=t-\sin t,\\ z=\sin 2t\end{cases}$, $t\in[0,\pi]$. 则第二型曲线积分$\displaystyle\int_\Gamma e^{\sin x}\Big(\cos x\cos y\,dx-\sin y\,dy\Big)+\cos z\,dz=\underline{-2}$.

(4) 设二次型$f(x_1,\ldots,x_n)=(x_1,\ldots,x_n)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$的矩阵$A$为$\begin{pmatrix}1&a&a&\cdots&a\\a&1&a&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\a&\cdots&a&1&a\\a&a&\cdots&a&1\end{pmatrix}$,

其中$n>1, a\in\mathbb{R}$. 则f在正交变换下的标准形为$\underline{((n-1)a+1)y_1^2-(a-1)y_2^2-\cdots-(a-1)y_n^2}$.

参考答案. (1)H_n是$m=2^n$阶对称方阵, 存在正交方阵P使得$P^{-1}H_nP=D$是对

角方阵．从而，$H_{n+1}=\begin{pmatrix}P & O\\ O & P\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D & I\\ I & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}P & O\\ O & P\end{pmatrix}^{-1}$与$\begin{pmatrix}D & I\\ I & D\end{pmatrix}$相似．设$H_n$的所有特征值是$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，则$H_{n+1}$的所有特征值是$\lambda_1+1,\lambda_1-1,\lambda_2+1,\lambda_2-1,\cdots,\lambda_m+1,\lambda_m-1$．利用数学归纳法容易证明：$H_n$的所有不同特征值为$\{n-2k \mid k=0,1,\cdots,n\}$，并且每个特征值$n-2k$的代数重数为$C_n^k=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$．因此，$\operatorname{rank}(H_4)=2^4-C_4^2$.

方法二：直接用分块阵的初等变换即可.

(2)**注: 利用 Lagrange 中值定理可以简化计算**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\tan x)-\ln(1+\sin x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$$

(3) -2.

(4) 只需求出A 的全部特征值即可. 显然$A+(a-1)I$ 的秩$\leqslant 1$. 故 $A+(a-1)I$ 的零空间的维数为$\geqslant n-1$, 从而可设A 的n 个特征值为

$$\lambda_1=1-a,\lambda_2=1-a,\cdots,\lambda_{n-1}=1-a,\lambda_n.$$

注意到 $trA=n$, 故得$\lambda_n=(n-1)a+1$. 结果，f在正交变换下的标准形为$((n-1)a+1)y_1^2-(a-1)y_2^2-\cdots-(a-1)y_n^2$.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 在空间直角坐标系下，设有椭球面

$$S:\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\quad a,b,c>0$$

及S外部一点$A(x_0,y_0,z_0)$，过A点且与S 相切的所有直线构成锥面Σ. 证明：存在平面Π，使得交线$S\cap\Sigma=S\cap\Pi$；同时求出平面Π的方程.

解：解法一：

因为A在S的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0. \tag{1}$$

对于任意的$M(x,y,z)\in S\cap\Sigma$，连接A,M的直线记为l_M，其参数方程可设为

$$\tilde{x}=x+t(x-x_0),\quad \tilde{y}=y+t(y-y_0),\quad \tilde{z}=z+t(z-z_0),\quad -\infty<t<+\infty. \tag{2}$$

代入椭球面的方程得

$$\frac{(x+t(x-x_0))^2}{a^2}+\frac{(y+t(y-y_0))^2}{b^2}+\frac{(z+t(z-z_0))^2}{c^2}=1.$$

整理得

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+t^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-2\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)\\+2t\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)=1.\end{aligned}$$

(5分)

因为点M在椭球面S上，$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$. 所以上式化为

$$t^2\left(1+\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-2\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)+2t\left(1-\left(\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z\right)\right)=0. \tag{3}$$

由于l_M与S在M点相切，方程(3)有一个二重根$t=0$. 故有

$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0. \tag{4}$$

此时由(1)知，方程(3)的首项系数化为

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}-1>0.$$

特别地，(4)的系数均不为零因而是一个平面方程，确定的平面记为Π. 上述的推导证明了$S\cap\Sigma\subset\Pi$，从而证明了$S\cap\Sigma\subset S\cap\Pi$.

(12分)

反之，对于截线$S\cap\Pi$上的任一点$M(x,y,z)$，由(3)、(4)两式即知，由A、M两点确定的直线l_M一定在点M与S相切. 故由定义，l_M在锥面Σ 上. 特别地，$M\in\Sigma$. 由M的任意性，$S\cap\Pi\subset S\cap\Sigma$.

结论得证. (15分)

解法二：

因为A在S的外部，故有

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}>1>0. \tag{5}$$

对于任意的$M(x_1,y_1,z_1)\in S\cap\Sigma$，椭球面$S$在$M$点的切平面方程可以写为

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z-1=0.$$

因为连接M和A两点的直线是S在点M的切线，所以A点在上述切平面上. 故

$$\frac{x_1}{a^2}x_0+\frac{y_1}{b^2}y_0+\frac{z_1}{c^2}z_0-1=0.$$

于是，点$M(x_1,y_1,z_1)$在平面（注意，由（6）式，x_0,y_0,z_0不全为0）

$$\Pi:\ \frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z-1=0$$

上，即有$M\in S\cap\Pi$.

(10分)

反之，对于任意的$M(x_1,y_1,z_1)\in S\cap\Pi$，有

$$\frac{x_0}{a^2}x_1+\frac{y_0}{b^2}y_1+\frac{z_0}{c^2}z_1-1=0.$$

则S在M点的切平面

$$\frac{x_1}{a^2}x+\frac{y_1}{b^2}y+\frac{z_1}{c^2}z-1=0$$

通过$A(x_0,y_0,z_0)$点，因而M,A的连线在点M和椭球面S相切，它在锥面Σ 上. 故$M\in S\cap\Sigma$.

结论得证. (15分)

得分	
评阅人	

三、（15分）设A, B, C均为n阶复方阵，且满足

$$AB - BA = C, \quad AC = CA, \quad BC = CB.$$

1. 证明：C是幂零方阵；
2. 证明：A, B, C同时相似于上三角阵；
3. 若$C \neq 0$, 求n的最小值.

证明.

1. 设C的不同特征值为$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, 不妨设$C$具有Jordan标准型： $C = diag(J_1, \ldots, J_k)$, 其中$J_i$为特征值$\lambda_i$对应的Jordan块. 对矩阵$B$做与$C$相同的分块， $B = (B_{ij})_{k\times k}$. 由$BC = CB$可得$J_iB_{ij} = B_{ij}J_j$, $i, j = 1, 2, \ldots, k$. 这样对任意多项式p有$p(J_i)B_{ij} = B_{ij}p(J_j)$. 取$p$为$J_i$的最小多项式，则得$B_{ij}p(J_j) = 0$. 当$i \neq j$时，$p(J_j)$可逆，从而$B_{ij} = 0$. 因此，$B = diag(B_{11}, \ldots, B_{kk})$. 同理，$A = diag(A_{11}, \ldots, A_{kk})$. 由 $AB - BA = C$得$A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii} = J_i$, $i = 1, \ldots, k$. 故$Tr(J_i) = Tr(A_{ii}B_{ii} - B_{ii}A_{ii}) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. 从而$\lambda_i = 0$, 即C为幂零方阵. (5分)
2. 令$V_0 = \{v \in \mathbb{C}^n \,|\, Cv = 0\}$. 对任意$v \in V_0$, 由于$C(Av) = A(Cv) = 0$, 因此$AV_0 \subseteq V_0$. 同理，$BV_0 \subseteq V_0$. 于是存在$0 \neq v \in V_0$和$\lambda \in \mathbb{C}$使得$Av = \lambda v$。记$V_1 = \{v \,|\, Av = \lambda v\} \subseteq V_0$, 由$AB - BA = C$知，对任意$u \in V_1$, $A(Bu) = B(Au) + Cu = \lambda Bu$. 故 $BV_1 \subseteq V_1$. 从而存在$0 \neq v_1 \in V_1$及$\mu \in \mathbb{C}$使得 $Bv_1 = \mu v_1$, 同时有$Av_1 = \lambda_1 v_1$, $Cv_1 = 0$. 将v_1扩充为$\mathbb{C}^n$ 的一组基$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, 令$P = (v_1, \ldots, v_n)$，则
$$AP = P\begin{pmatrix} \lambda & x \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}, \quad BP = P\begin{pmatrix} \mu & y \\ 0 & B_1 \end{pmatrix}, \quad CP = P\begin{pmatrix} 0 & z \\ 0 & C_1 \end{pmatrix}.$$
并且A_1, B_1, C_1满足$A_1B_1 - B_1A_1 = C_1, A_1C_1 = C_1A_1, B_1C_1 = C_1B_1$. 由数学归纳法即可得知, A, B, C同时相似于上三角阵。 (10分)
3. 当$n \geq 3$时，取$A = E_{12}, B = E_{23}, C = E_{13}$，则$A, B, C$满足题意。对$n = 2$, 不妨设 $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. 则有$AC = CA$得$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$. 类似由有$BC = CB$得$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}$. 于是$AB - BA = 0$，这与$AB - BA = C$矛盾！故满足$C \neq 0$的最小$n$为3.

(15分）

得分	
评阅人	

四、（本题20分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有二阶连续导函数, 且 $f(0)f(1)\geqslant 0$. 求证:

$$\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,dx + \int_0^1 |f''(x)|\,dx.$$

解答　设 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(x_1)|$, $m=\min\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|=|f'(x_0)|$. 则有

$$\int_0^1 |f''(x)|\,dx \geqslant \left|\int_{x_0}^{x_1} f''(x)\,dx\right| = |f'(x_1)-f'(x_0)| \geqslant M-m.$$

(5分)

另一方面, 有 $\int_0^1 |f'(x)|\,dx \leqslant M\int_0^1\,dx = M$. 故, 只需证明

$$m \leqslant 2\int_0^1 |f(x)|\,dx. \tag{2}$$

若 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 中有零点, 则 $m=0$. 此时 (2) 显然成立. 现在假设 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上无零点, 不妨设 $f'(x)>0$, 因而 $f(x)$ 严格递增. 下面分两种情形讨论. (10分)

情形 1. $f(0)\geqslant 0$. 此时 $f(x)\geqslant 0$ $(x\in[0,1])$. 由 $f'(x)=|f'(x)|\geqslant m$, 得

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &= \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(x)-f(0))\,dx + f(0)\\ &\geqslant \int_0^1 (f(x)-f(0))\,dx = \int_0^1 f'(\xi)x\,dx \geqslant \int_0^1 mx\,dx = \frac{1}{2}m\end{aligned}$$

故, (2) 成立. (15分)

情形 2. $f(0)<0$. 此时有 $f(1)\leqslant 0$, 根据 f 的递增性, 有 $f(x)\leqslant 0$ $(x\in[0,1])$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 |f(x)|\,dx &= -\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (f(1)-f(x))\,dx - f(1)\\ &\geqslant \int_0^1 |f(1)-f(x)|\,dx = \int_0^1 |f'(\xi)|(1-x)\,dx \geqslant \int_0^1 m(1-x)\,dx = \frac{1}{2}m.\end{aligned}$$

此时, (2) 也成立. 注：由$f(0)f(1)\geqslant 0$, 可不妨设$f(x)\geqslant 0, x\in[0,1]$.可只考虑情形 1. (20分)

专业:______ 考生座位号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、（本题10分）设 G 为群，且满足：$\forall x, y \in G, (xy)^2 = (yx)^2$. 证明：$\forall x, y \in G,$, 元素 $xyx^{-1}y^{-1}$ 的阶不超过2.

证明. 先证 $x^2y = yx^2$. 事实上有

$$x^2y = ((xy^{-1})y)^2y = (y(xy^{-1}))^2y = yxy^{-1}yx = yx^2.$$

(3分）

再证 $x^{-1}y^{-1}x = xy^{-1}x^{-1}$. 这可由

$$x^{-1}y^{-1}x = x(x^{-1})^2y^{-1}x = xy^{-1}(x^{-1})^2x = xy^{-1}x^{-1}$$

看出. (6分)

最后验证$(xyx^{-1}y^{-1})^2 = e$. 这是因为

$$(xyx^{-1}y^{-1})^2 = xy(x^{-1}y^{-1}x)yx^{-1}y^{-1} = xy(xy^{-1}x^{-1})yx^{-1}y^{-1}$$

$$= (xyx)(y^{-1}x^{-1}y)x^{-1}y^{-1} = xyx(yx^{-1}y^{-1})x^{-1}y^{-1} = (xy)^2(x^{-1}y^{-1})^2 = (xy)^2(xy)^{-2} = e$$

证毕. (10分)

得分	
评阅人	

六、（本题10分）设$E \subset \mathbb{R}^n$为可测集满足$m(E) < \infty$. 设$f,\ f_k \in L^2(E)$,在E上几乎处处有$f_k \to f$，且

$$\limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(t)|^2 dt \leqslant \int_E |f(t)|^2 dt < \infty.$$

求证：

$$\lim_{k\to\infty} \int_E |f_k(t) - f(t)|^2 dt = 0.$$

证明： 先证任取$F \subset E$有

$$\lim_{k\to\infty} \int_F |f_k(t)|^2 dt = \int_F |f(t)|^2 dt. \tag{$*$}$$

由Fatou引理

$$\begin{aligned}
\int_F |f(t)|^2 dt &= \int_F \liminf_{k\to\infty} |f_k(t)|^2 dt \\
&\leqslant \liminf_{k\to\infty} \int_F |f_k(t)|^2 dt \leqslant \limsup_{k\to\infty} \int_F |f_k(t)|^2 dt \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left[\int_E |f_k(t)|^2 dt - \int_{E\setminus F} |f_k(t)|^2 dt \right] \\
&\leqslant \limsup_{k\to\infty} \int_E |f_k(t)|^2 dt - \liminf_{k\to\infty} \int_{E\setminus F} |f_k(t)|^2 dt \\
&\leqslant \int_E |f(t)|^2 dt - \int_{E\setminus F} \liminf_{k\to\infty} |f_k(t)|^2 dt \\
&= \int_E |f(t)|^2 dt - \int_{E\setminus F} |f(t)|^2 dt = \int_F |f(t)|^2 dt.
\end{aligned}$$

因此$(*)$成立。 (4分)

由于$|f|^2$可积，任给$\epsilon > 0$，存在$\delta > 0$使得任取可测集$F \subset E$满足$m(F) < \delta$时，有

$$\int_F |f(t)|^2 dt < \frac{\epsilon}{12}, \tag{$**$}$$

(6分)

由叶果洛夫定理，存在$E_\delta \subset E$，使得$m(E \setminus E_\delta) < \delta$，且在$E_\delta$上$f_k$一致地收敛到$f$。因此存在$N_1$，任取$k \geqslant N_1$，$t \in E_\delta$有

$$|f_k(t) - f(t)| \leqslant \left[\frac{\epsilon}{3(1 + m(E))} \right]^{1/2}.$$

(8分)

由于$m(E \setminus E_\delta) < \delta$，利用(**)我们有

$$\int_{E\setminus E_\delta} |f(t)|^2 dt < \frac{\epsilon}{12}.$$

由(*)我们有

$$\lim_{k\to\infty} \int_{E\setminus E_\delta} |f_k(t)|^2 dt = \int_{E\setminus E_\delta} |f(t)|^2 dt,$$

故存在N_2，使得任取$k \geqslant N_2$有

$$\int_{E\setminus E_\delta} |f_k(t)|^2 dt < \frac{\epsilon}{12}.$$

令$N = max(N_1, N_2)$，则当$k \geqslant N$，有

$$\begin{aligned}
&\int_E |f_k(t) - f(t)|^2 dt \\
&= \int_{E_\delta} |f_k(t) - f(t)|^2 dt + \int_{E\setminus E_\delta} |f_k(t) - f(t)|^2 dt \\
&\leqslant \frac{\epsilon}{3(1+m(E))} m(E_\delta) + 4\int_{E\setminus E_\delta} |f_k(t)|^2 dt + 4\int_{E\setminus E_\delta} |f(t)|^2 dt \\
&< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.
\end{aligned}$$

(10分)

得分	
评阅人	

七、（本题10分）已知椭圆柱面S：

$$\mathbf{r}(u,v)=\{a\cos u,b\sin u,v\},\quad -\pi\leqslant u\leqslant\pi,\quad -\infty<v<+\infty.$$

（1）求S上任意测地线的方程；

（2）设$a=b$. 取$P=(a,0,0)$, $Q=(a\cos u_0,a\sin u_0,v_0)$ $(-\pi<u_0<\pi,-\infty<v_0<+\infty)$. 写出$S$上连接$P,Q$两点的最短曲线的方程.

解：（1）求S上的任意测地线的方程.

解法一：

$$\mathbf{r}_u=\{-a\sin u,b\cos u,0\},\quad \mathbf{r}_v=\{0,0,1\},$$

所以，S的单位法向量为

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v|}=(a^2\sin^2u+b^2\cos^2u)^{-\frac{1}{2}}\{b\cos u,a\sin u,0\}.\tag{6}$$

设γ是S上的任意测地线，其曲纹坐标参数方程暂设为

$$u=u(t),\quad v=v(t),\quad t\in\mathbb{R}.\tag{7}$$

首先，由于任意曲面上的直线（如果存在的话）都是测地线，S上的直母线（即$u=$常数）均为测地线. 于是只需求满足条件$u'(t)\neq0$的测地线. 此时，可作γ的参数变换使得它可以用显式函数$v=f(u)$（$u\in[-\pi,\pi]$）来表示. 于是，γ的向量式参数方程化为

$$\mathbf{r}(u)=\{a\cos u,b\sin u,f(u)\},\quad u\in[-\pi,\pi].\tag{8}$$

关于参数u求导，得

$$\mathbf{r}'(u)=\{-a\sin u,b\cos u,f'(u)\},\quad \mathbf{r}''(u)=\{-a\cos u,-b\sin u,f''(u)\}.\tag{9}$$

所以，γ的单位切向量为

$$\mathbf{T}(u)=|\mathbf{r}'(u)|^{-1}\mathbf{r}'(u)=|\mathbf{r}'|^{-1}\{-a\sin u,b\cos u,f'(u)\}.\tag{10}$$

如果s是曲线γ的弧长，则有$\frac{ds}{du}=|\mathbf{r}'(u)|$. 于是$\gamma$的曲率向量为

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{T}}{ds}=&\frac{d\mathbf{T}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\left(\mathbf{r}''|\mathbf{r}'(u)|^{-1}+\mathbf{r}'\frac{}{dt}(|\mathbf{r}'|^{-1})\right)\frac{dt}{ds}\\=&\mathbf{r}''|\mathbf{r}'|^{-2}-\mathbf{r}'|\mathbf{r}'|^{-3}\cdot|\mathbf{r}'|'.\end{aligned}\tag{11}$$

因此，曲线γ在曲面S上的测地曲率为

$$\kappa_g = \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{n}, \mathbf{T}\right) = |\mathbf{r}'|^{-2}(\mathbf{r}'', \mathbf{n}, \mathbf{T}).$$

所以，γ是测地线当且仅当$(\mathbf{r}'', \mathbf{n}, \mathbf{T}) \equiv 0$. 再由(6), (9) 和(10)，此式等价于

$$\begin{vmatrix} -a\cos u & -b\sin u & f''(u) \\ b\cos u & a\sin u & 0 \\ -a\sin u & b\cos u & f'(u) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

上式等价于

$$f''(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u) = f'(a^2 - b^2)\sin u\cos u. \tag{12}$$

（i）$f' \equiv 0$. 则$v = f(u) \equiv c$是常数，曲线γ是S上的正截线，即椭圆

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad z = c.$$

（ii）$f' \neq 0$. 则(12)等价于微分方程

$$\begin{aligned}(\log|f'|)' =& \frac{f''}{f'} = \frac{(a^2-b^2)\sin u\cos u}{a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u} \\ =& \frac{1}{2}\cdot\frac{(a^2-b^2)(\sin^2 u)'}{(a^2-b^2)\sin^2 u + b^2} \\ =& \left(\log(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)^{\frac{1}{2}}\right)'.\end{aligned}$$

两边关于u进行积分，得 $f' = c(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)^{\frac{1}{2}}, 0 \neq c \in \mathbb{R}$. 再积分即得

$$f = c\int(a^2\sin^2 u + b^2\cos^2 u)^{\frac{1}{2}}du, \quad 0 \neq c \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

所以，S上的测地线为如下三类曲线：

（i）S上的直母线（$v =$常数）；（ii）S上的横截椭圆（$u =$常数）；（iii）曲线(8)，其中函数f由(13)确定. (8分)

解法二：

把椭圆柱面沿一条直母线剪开展为平面上的一个带形区域：

$$s_1 < s < s_2, \quad -\infty < v < +\infty,$$

其中$s = s(u)$是椭圆

$$\mathbf{r}(u) = \{a\cos u, b\sin u, 0\}, \quad -\pi \leqslant u \leqslant \pi$$

的弧长函数.

因为把柱面展开为平面对应的变换保持曲面上曲线的弧长不变，而保长变换（即等距）把测地线变为测地线，所以已知椭圆柱面上的测地线对应于上述带形区域中的测地线即直线.

根据平面上直线的方程，带形区域中直线方程为

$$As + Bv + C = 0.$$

另一方面，由弧长微分公式知：

$$ds = |\mathbf{r}'(u)|du = \left(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u\right)^{\frac{1}{2}} du.$$

故得

$$s = \int \left(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u\right)^{\frac{1}{2}} du.$$

所以，已知椭球面上所求的测地线方程为

$$A \int \left(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u\right)^{\frac{1}{2}} du + Bv + C = 0, \quad A, B \text{ 不全为 } 0.$$

(i) 如果$A = 0$，则有$v =$常数，对应椭圆柱面上的横截椭圆；

(ii) 如果$B = 0$，则有

$$\int \left(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u\right)^{\frac{1}{2}} du = \text{常数},$$

即$u =$常数，对应椭圆柱面上的直母线；

(iii) 如果$A \neq 0$，$B \neq 0$，则有

$$v \equiv f(u) = c \int \left(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u\right)^{\frac{1}{2}} du, \quad c \neq 0.$$

(8分)

（2）由于$b = a$，由(13)确定的测地线方程(8)简化为

$$\mathbf{r}(u) = \{a \cos u, a \sin u, c_1 u + c_2\}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R},\ c_1 \neq 0. \tag{14}$$

因此，对于给定的点$Q(a \cos u_0, a \sin u_0, v_0)$，

（i）如果$u_0 = 0$，则所求的最短曲线为连接P, Q的直母线段：$0 \leqslant v \leqslant v_0$；

（ii）如果$v_0 = 0$，则所求的最短曲线为连接P, Q的正截椭圆劣弧段：$u_0 \leqslant u \leqslant 0$（如果$u_0 < 0$)或$0 \leqslant u \leqslant u_0$（如果$u_0 > 0$)；

（iii）如果$u_0 \neq 0, v_0 \neq 0$，则当测地线通过P点时，可设$c_2 = 0$. 再令$c_1 u_0 = v_0$，得$c_1 = u_0^{-1} v_0$. 从而所求的最短曲线方程为

$$\mathbf{r}(u) = \{a\cos u, a\sin u, (u_0^{-1} v_0)u\},$$

其中当$u_0 < 0$时，$u \in [u_0, 0]$；当$u_0 > 0$时，$u \in [0, u_0]$. (10分)

得分	
评阅人	

八、（本题10分）推导求解线性方程组的共轭梯度法的计算格式，并证明该格式经有限步迭代后收敛。

解答 考虑n阶线性方程组$A\mathbf{x}=\mathbf{b}$, 这里A为n阶实对称正定方阵，$\mathbf{b}$为n维列向量。求解该方程组等价于求二次函数

$$f(\mathbf{x}):=\frac{1}{2}\mathbf{x}^TA\mathbf{x}-\mathbf{b}^T\mathbf{x}$$

的最小值。迭代法求解该问题的一般格式为：

$$\mathbf{x}_{i+1}=\mathbf{x}_i+\alpha_i\mathbf{d}_i, i=0,1,2,\ldots,$$

其中$\mathbf{x}_0$为给定初值，$\mathbf{x}_i$是$\mathbf{x}$的第i步迭代值，$\mathbf{d}_i$是第i步前进方向，α_i为步长。选取α_i使得$f(\mathbf{x}_i+\alpha_i\mathbf{d}_i)$达到最下，易得

$$\alpha_i=\frac{\mathbf{d}_i^T\mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_i^TA\mathbf{d}_i},$$

其中$\mathbf{r}_i=\mathbf{b}-A\mathbf{x}_i$为残差。显然残差满足递推关系

$$\mathbf{r}_{i+1}=\mathbf{b}-A(\mathbf{x}_i+\alpha_i\mathbf{d}_i)=r_i-\alpha_iA\mathbf{d}_i.$$

在共轭梯度法中，我们要求迭代方向彼此A-正交，即$\mathbf{d}_i^TA\mathbf{d}_j=0, i\neq j$, 并且$\mathbf{r}_i$与$\mathbf{r}_j$ $(i\neq j)$ 彼此正交，因此，可以构造共轭方向$\mathbf{d}_i$如下：

$$\mathbf{d}_0=\mathbf{r}_0,\quad \mathbf{d}_{i+1}=\mathbf{r}_{i+1}+\beta_{i+1}\mathbf{d}_i,\quad i=0,1,2,\ldots,$$

由$\mathbf{d}_i$与$\mathbf{d}_{i+1}$ A-正交得

$$\mathbf{d}_i^TA\mathbf{d}_{i+1}=\mathbf{d}_i^TA(\mathbf{r}_{i+1}+\beta_{i+1}\mathbf{d}_i)=0,\quad i=0,1,2,\ldots,$$

故

$$\beta_{i+1}=-\frac{\mathbf{d}_i^TA\mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{d}_i^TA\mathbf{d}_i}.$$

由于

$$\mathbf{d}_i^TA\mathbf{r}_{i+1}=\mathbf{r}_{i+1}^TA\mathbf{d}_i=\frac{1}{\alpha_i}\mathbf{r}_{i+1}^T(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_{i+1})=-\frac{1}{\alpha_i}\mathbf{r}_{i+1}^T\mathbf{r}_{i+1},$$

以及

$$\mathbf{d}_i^T\mathbf{r}_i=(\mathbf{r}_i+\beta_i\mathbf{d}_{i-1})^T\mathbf{r}_i=\mathbf{r}_i^T\mathbf{r_i},$$

其中用到了$\mathbf{d}_{i-1}^T\mathbf{r}_i = 0$. 将以上两式代入$\beta_{i+1}$的表达式即可得

$$\beta_{i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T\mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_i}.$$

于是求解线性方程组$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$的共轭梯度法如下：

$$\begin{aligned}
&\mathbf{d}_0 = \mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - A\mathbf{x}_0, \quad \alpha_i = \frac{\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_i}{\mathbf{d}_i^T A\mathbf{d}_i},\\
&\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \alpha_i\mathbf{d}_i, \quad \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i - \alpha_i A\mathbf{d}_i\\
&\beta_{i+1} = \frac{\mathbf{r}_{i+1}^T\mathbf{r}_{i+1}}{\mathbf{r}_i^T\mathbf{r}_i}, \quad \mathbf{d}_{i+1} = \mathbf{r}_{i+1} + \beta_{i+1}\mathbf{d}_i,
\end{aligned}$$

$i = 0, 1, 2, \ldots, n.$ (5分)

下面我们证明，共轭梯度法最多在n步得到解的精确值。实际上，由 $A\mathbf{x}_{i+1} = A\mathbf{x}_i + \alpha_i A\mathbf{d}_i$有，

$$A\mathbf{x}_n = A\mathbf{x}_0 + \alpha_1 A\mathbf{d}_1 + \ldots + \alpha_{n-1}A\mathbf{d}_{n-1}.$$

这样

$$\mathbf{d}_i^T(A\mathbf{x}_n - \mathbf{b}) = \mathbf{d}_i^T(A\mathbf{x}_0 - \mathbf{b}) + \alpha_i\mathbf{d}_i^T A\mathbf{d}_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

下面我们说明上式右边为零。实际上，

$$\begin{aligned}
\alpha_i\mathbf{d}_i^T A\mathbf{d}_i = \mathbf{d}_i^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}^i) &= \mathbf{d}_i^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0) + \sum_{k=1}^{i}\mathbf{d}_i^T(A\mathbf{x}_{k-1} - A\mathbf{x}_k)\\
&= \mathbf{d}_i^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0) - \sum_{k=1}^{i}\alpha_{k-1}\mathbf{d}_i^T A\mathbf{d}_{k-1} = \mathbf{d}_i^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}_0).
\end{aligned}$$

也就是说，$A\mathbf{x}_n - \mathbf{b}$与所有$\mathbf{d}_i$正交，$i = 0, 1, \ldots, n-1$. 从而$A\mathbf{x}_n = \mathbf{b}$. (10分)

得分	
评阅人	

九、（本题10分）设函数$f(z)$ 在单位圆$|z|<1$ 内解析，在其边界上连续.若在 $|z|=1$ 上$|f(z)|=1$. 证明 $f(z)$为有理函数.

证明：因函数$f(z)$ 在单位圆$|z|<1$ 内解析,在 $|z|=1$ 上$|f(z)|=1$,则$f(z)$ 在单位圆$|z|<1$ 内的零点只有有限多个,设为$z_1,z_2,\ldots,z_n$ （k重零点算k个单零点）. (2 分)

做变换

$$f_k(z)=e^{i\alpha_k}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}(1\leqslant k\leqslant n),$$

α_k 为实数. 则$f_k(z)$ 把$|z|<1$ 保形映射为$|f_k(z)|<1$, 且当 $|z|=1$ 时$|f(z)|=1$，$f_k(z_k)=0(1\leqslant k\leqslant n)$. (5分)

作函数

$$F(z)=\Pi_{k=1}^n f_k^{-1}(z)f(z)=f(z)e^{-i\alpha}\Pi_{k=1}^n\frac{1-\overline{z_k}z}{z-z_k},$$

其中$\alpha=\Sigma_{k=1}^n\alpha_k$. 则函数$F(z)$在单位圆$|z|<1$ 内解析，没有零点，在 $|z|=1$ 上$|F(z)|=1$ (7分)

由解析函数的最大最小模原理，在在 $|z|\leqslant 1$ 上$F(z)=C$(常数)，且$|C|=1$.

于是

$$f(z)=Ce^{i\alpha}\Pi_{k=1}^n\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}=C^{'}\Pi_{k=1}^n\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$$

为有理函数. (10分)

姓名:________ 准考证号:________ 所在院校:________ 考生座位号:________ 专业:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

十、（本题10分）设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立同分布的随机变量, 其有共同的分布函数$F(x)$和密度函数$f(x)$. 现对随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$按大小顺序重新排列为 $X_{n1} \leqslant X_{n2} \leqslant \cdots \leqslant X_{nn}$.

(a) 求随机变量(X_{n1}, X_{nn})的联合概率密度函数$f_{1n}(x, y)$;

(b) 如果X_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$服从区间[0, 1]上的均匀分布，求随机变量$U = X_{nn} + X_{n1}$的密度函数$f_U(u)$.

解： (a) 记(X_{n1}, X_{nn})的联合分布函数为$F_{X_{n1}X_{nn}}(x, y)$.

若$x < y$, 则

$$
\begin{aligned}
&F_{X_{n1}X_{nn}}(x, y) = P(X_{n1} \leqslant x, X_{nn} \leqslant y) \\
=&P(X_{nn} \leqslant y) - P(X_{n1} > x, X_{nn} \leqslant y) \\
=&P(X_1 \leqslant y, X_2 \leqslant y, \cdots, X_n \leqslant y) - P(x < X_1 \leqslant y, x < X_2 \leqslant y, \cdots, x < X_n \leqslant y) \\
=&[F(y)]^n - [F(y) - F(x)]^n.
\end{aligned}
$$

若$x \geqslant y$, 则 $F_{X_{n1}X_{nn}}(x, y) = P(X_{n1} \leqslant x, X_{nn} \leqslant y) = P(X_{nn} \leqslant y) = [F(y)]^n$.

故(X_{n1}, X_{nn})的联合密度函数为

$$
f_{1n}(x, y) = \begin{cases} n(n-1)[F(y) - F(x)]^{n-2} f(x) f(y), & x < y, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}
$$

(4分)

(b) 由于X_i服从区间[0, 1]上的均匀分布，所以

$$
f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}, \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ x, & 0 < x < 1, \\ 1, & x \geqslant 1. \end{cases}
$$

于是由（a）得(X_{n1}, X_{nn})的联合密度函数为

$$
f_{1n}(x, y) = \begin{cases} n(n-1)(y - x)^{n-2}, & 0 < x < y < 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}
$$

(6分)

【方法一】记$v = x_{nn} - x_{n1}$, 则 $\begin{cases} u = x_{nn} + x_{n1} \\ v = x_{nn} - x_{n1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n1} = \frac{u-v}{2} \\ x_{nn} = \frac{u+v}{2} \end{cases}$，该变换的雅可比行列式$J = \frac{\partial(x_{n1}, x_{nn})}{\partial(u,v)} = \frac{1}{2}$，则由$(X_{n1}, X_{nn})$的联合密度得$(U, V)$的联合密度为

$$\begin{aligned} f_{UV}(u,v) &= f_{1n}\left(\frac{u-v}{2}, \frac{u+v}{2}\right)|J| \\ &= \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2} v^{n-2}, & 0 < v < 1,\ 0 < u-v < 2,\ 0 < u+v < 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \end{aligned}$$

则$U = X_{nn} + X_{n1}$的密度函数

$$\begin{aligned} f_U(u) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{UV}(u,v)dv \\ &= \begin{cases} \frac{n(n-1)}{2}\int_0^u v^{n-2}dv = \frac{n}{2}u^{n-1}, & 0 < u < 1, \\ \frac{n(n-1)}{2}\int_0^{2-u} v^{n-2}dv = \frac{n}{2}(2-u)^{n-1}, & 1 < u < 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \end{aligned}$$

(10分)

【方法二】求U的分布函数$F_U(u)$. 显然U的取值范围是[0, 2].

所以，当$u \leqslant 0$时，$F_U(u) = P(U \leqslant u) = 0$; 当$u \geqslant 2$时，$F_U(u) = 1$;

当$0 < u < 1$时，

$$F_U(u) = P(U \leqslant u) = \iint_{x+y \leqslant u} f_{1n}(x,y)dxdy = \int_0^{u/2} dx \int_x^{u-x} n(n-1)(y-x)^{n-2}dy = \frac{1}{2}u^n;$$

当$1 < u < 2$时，

$$\begin{aligned} F_U(u) = P(U \leqslant u) &= \iint_{x+y \leqslant u} f_{1n}(x,y)dxdy \\ &= \int_0^{u-1} dx \int_x^1 n(n-1)(y-x)^{n-2}dy + \int_{u-1}^{u/2} dx \int_x^{u-x} n(n-1)(y-x)^{n-2}dy \\ &= 1 - \frac{1}{2}(2-u)^n. \end{aligned}$$

故$U = X_{nn} + X_{n1}$的密度函数

$$f_U(u) = \begin{cases} \frac{n}{2}u^{n-1}, & 0 < u < 1, \\ \frac{n}{2}(2-u)^{n-1}, & 1 < u < 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(10分)