第九届全国大学生数学竞赛决赛试题参考答案及评分标准

（非数学类，2018 年 3 月）

一、填空题(满分 30 分，每小题 6 分)：

(1) 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x\ln(1+\sin^2 x)}=$ $\underline{\quad\dfrac{1}{2}\quad}$.

(2) 设一平面过原点和点 $(6,-3,2)$，**且与平面** $4x-y+2z=8$ **垂直，则此平面方程为** $\underline{\ 2x+2y-3z=0\ }$.

(3) 设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，满足 $\mathrm{d}f(x,y)=ye^y\mathrm{d}x+x(1+y)e^y\mathrm{d}y$，及 $f(0,0)=0$，则 $f(x,y)=$ $\underline{\quad xye^y.\quad}$

(4) 满足 $\dfrac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=u(t)+\int_0^1 u(t)\mathrm{d}t$ **及** $u(0)=1$ **的可微函数** $u(t)=$ $\underline{\quad\dfrac{2e^t-e+1}{3-e}\quad}$.

(5) 设 a,b,c,d 是互不相同的正实数，x,y,z,w 是实数，满足 $a^x=bcd$，$b^y=cda$，$c^z=dab$，$d^w=abc$，则行列式 $\begin{vmatrix}-x & 1 & 1 & 1\\ 1 & -y & 1 & 1\\ 1 & 1 & -z & 1\\ 1 & 1 & 1 & -w\end{vmatrix}=$ $\underline{\quad 0\quad}$.

二、(本题满分 11 分) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内连续，且存在两两互异的点 $x_1,x_2,x_3,x_4\in(0,1)$，使得

$$\alpha=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<\frac{f(x_3)-f(x_4)}{x_3-x_4}=\beta,$$

证明：对任意 $\lambda\in(\alpha,\beta)$，存在互异的点 $x_5,x_6\in(0,1)$，使得 $\lambda=\dfrac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}$.

【证】 不妨设 $x_1<x_2,x_3<x_4$，考虑辅助函数

$$F(t)=\frac{f((1-t)x_2+tx_4)-f((1-t)x_1+tx_3)}{(1-t)(x_2-x_1)+t(x_4-x_3)},\qquad \cdots\cdots\cdots\ 4\text{ 分}$$

则 $F(t)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=\alpha<\lambda<\beta=F(1)$. 根据连续函数介值定理，存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $F(t_0)=\lambda$. $\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ 3 分

令 $x_5=(1-t_0)x_1+t_0x_3$， $x_6=(1-t_0)x_2+t_0x_4$，则 $x_5,x_6\in(0,1)$， $x_5<x_6$，且

$$\lambda=F(t_0)=\frac{f(x_5)-f(x_6)}{x_5-x_6}.$$ …………………… 4 分

三、**(本题满分 11 分)**设函数 $f\left(x\right)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上连续且 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\neq 0$，证明：在区间 $\left[0,1\right]$ 上存在三个不同的点 x_1,x_2,x_3，使得

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1}f(t)\,\mathrm{d}\,t+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3\\&=\left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2}f(t)\,\mathrm{d}\,t+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).\end{aligned}$$

【证】 令 $F(x)=\dfrac{4}{\pi}\dfrac{\arctan x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t}$，则 $F\left(0\right)=0,F\left(1\right)=1$ 且函数 $F\left(x\right)$ 在闭区间 $\left[0,1\right]$ 上可导. 根据介值定理，存在点 $x_3\in\left(0,1\right)$，使 $F\left(x_3\right)=\dfrac{1}{2}$.

…………………… 5 分

再分别在区间 $\left[0,\ x_3\right]$ 与 $\left[x_3,\ 1\right]$ 上利用拉格朗日中值定理，存在 $x_1\in(0,x_3)$，使得 $F(x_3)-F(0)=F'(x_1)(x_3-0)$，即

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+x_1^2}\int_0^{x_1}f(x)\,\mathrm{d}\,x+f(x_1)\arctan x_1\right]x_3;$$ ……… 3 分

且存在 $x_2\in(x_3,1)$，使 $F(1)-F(x_3)=F'(x_2)(1-x_3)$，即

$$\frac{\pi}{8}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{1+x_2^2}\int_0^{x_2}f(x)\,\mathrm{d}\,x+f(x_2)\arctan x_2\right](1-x_3).$$

…………………… 3 分

四、**(本题满分 12 分)** 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right]$.

【解】 注意到 $\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}=n\left[\dfrac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]\cdot\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$， 而 ………… 3 分

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\ln\frac{k}{n}}=e^{\int_0^1\ln x\mathrm{d}x}=\frac{1}{e},$$ …………… 3 分

$$\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[(n+1)n]{\frac{[(n+1)!]^n}{(n!)^{n+1}}}=\sqrt[(n+1)n]{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}=e^{-\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}},\qquad \cdots\cdots \text{ 3 分}$$

利用等价无穷小替换$e^x-1\sim x(x\to 0)$，得

$$\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]=-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\ln\frac{k}{n+1}=-\int_0^1\ln x\mathrm{d}x=1,$$

因此，所求极限为

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sqrt[n+1]{(n+1)!}-\sqrt[n]{n!}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}\bullet\lim_{n\to\infty}n\left[\frac{\sqrt[n+1]{(n+1)!}}{\sqrt[n]{n!}}-1\right]=\frac{1}{e}.\qquad \cdots\cdots \text{ 3 分}$$

五、**(本题满分 12 分)** 设$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^n$，定义$H(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$，$n\geq 2$.

(1) 证明：对任一非零$x\in\mathrm{R}^n$，$H(x)>0$；

(2) 求$H(x)$满足条件$x_n=1$的最小值.

【证】 (1) 二次型$H(x)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & & & \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & & \\ & -\frac{1}{2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 & -\frac{1}{2} \\ & & & -\frac{1}{2} & 1\end{pmatrix},\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{ 3 分}$$

因为A实对称，其任意k阶顺序主子式$\Delta_k>0$，所以A正定，故结论成立.

…………………… 3 分

(2) 对A作分块如下$A=\begin{pmatrix}A_{n-1} & \alpha \\ \alpha^{\mathrm{T}} & 1\end{pmatrix}$，其中$\alpha=(0,\cdots,0,-\frac{1}{2})^{\mathrm{T}}\in\mathrm{R}^{n-1}$，取可逆矩阵$P=\begin{pmatrix}I_{n-1} & -A_{n-1}^{-1}\alpha \\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则$P^{\mathrm{T}}AP=\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0 \\ 0 & 1-\alpha^{\mathrm{T}}A_{n-1}^{-1}\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{n-1} & 0 \\ 0 & a\end{pmatrix}$，其中

$a = 1 - \alpha^{\mathrm{T}} A_{n-1}^{-1} \alpha$. ………………… 3 分

记 $x = P(x_0, 1)^{\mathrm{T}}$，其中 $x_0 = (x_1, x_2, \cdots, x_{n-1})^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^{n-1}$，因为

$$H(x) = x^{\mathrm{T}} A x = (x_0^{\mathrm{T}}, 1) P^{\mathrm{T}} (P^{\mathrm{T}})^{-1} \begin{pmatrix} A_{n-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} P^{-1} P \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_0^{\mathrm{T}} A_{n-1} x_0 + a,$$

且 A_{n-1} 正定，所以 $H(x) = x_0^{\mathrm{T}} A_{n-1} x_0 + a \ge a$，当 $x = P(x_0, 1)^{\mathrm{T}} = P(0,1)^{\mathrm{T}}$ 时，$H(x) = a$.

因此，$H(x)$ 满足条件 $x_n = 1$ 的最小值为 a. ………………… 3 分

六、**(本题满分 12 分)** 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D = \left\{(x,y) \middle| x^2 + y^2 \le a^2\right\}$ 上具有一阶连续偏导数，且满足 $f(x,y)\big|_{x^2+y^2=a^2} = a^2$，以及 $\max\limits_{(x,y)\in D}\left[\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = a^2$，其中 $a > 0$. 证明：$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \dfrac{4}{3}\pi a^4$.

【解】 在格林公式

$$\oint_C P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中，依次取 $P = yf(x,y)$，$Q = 0$ 和取 $P = 0$，$Q = xf(x,y)$，分别可得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_C yf(x,y)\mathrm{d}x - \iint_D y\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C xf(x,y)\mathrm{d}y - \iint_D x\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

两式相加，得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{a^2}{2}\oint_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\iint_D \left(x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2$$

………………… 4 分

对 I_1 再次利用格林公式，得 $I_1 = \dfrac{a^2}{2}\oint\limits_C -y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y = a^2\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi a^4$， …… 2 分

对 I_2 的被积函数利用柯西不等式，得

$$|I_2| \le \frac{1}{2}\iint_D \left|x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y}\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \frac{1}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$\le \frac{a}{2}\iint_D \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{3}\pi a^4,$$ …………………… 4 分

因此，有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right| \le \pi a^4 + \frac{1}{3}\pi a^4 = \frac{4}{3}\pi a^4.$$ …………… 2 分

七、**(本题满分 12 分)** 设 $0<a_n<1$，$n=1,2,\cdots$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}=q$（有限或 $+\infty$）.

(1) 证明：当 $q>1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，当 $q<1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散；

(2) 讨论 $q=1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的收敛性并阐述理由.

证：(1) 若 $q>1$，则 $\exists\, p\in\mathbf{R}$，s. t. $q>p>1$. 根据极限性质，$\exists N\in\mathbf{Z}^+$，s. t. $\forall n>N$，有 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}>p$，即 $a_n<\dfrac{1}{n^p}$，而 $p>1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 收敛, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

…………………… 3 分

若 $q<1$，则 $\exists\, p\in\mathbf{R}$，s. t. $q<p<1$. 根据极限性质，$\exists N\in\mathbf{Z}^+$，s. t. $\forall n>N$，有 $\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}<p$，即 $a_n>\dfrac{1}{n^p}$，而 $p<1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^p}$ 发散, 所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

…………………… 3 分

(2) 当 $q=1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 可能收敛，也可能发散.

例如：$a_n=\dfrac{1}{n}$ 满足条件，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散； …………………… 3 分

又如：$a_n=\dfrac{1}{n\ln^2 n}$ 满足条件，但级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. …………………… 3 分