姓名: ____ 准考证号: ____ 所在院校: ____ 考生座位号: ____ 专业: ____

密封线 答题时不要超过此线

第十届全国大学生数学竞赛试卷

(数学类, 2018年10月)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意: 1. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.

2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

一、(本题 15 分)在空间直角坐标系中,设马鞍面S的方程为$x^2 - y^2 = 2z$. 设σ为平面$z = \alpha x + \beta y + \gamma$,其中$\alpha, \beta, \gamma$为给定常数. 求马鞍面$S$上点$P$ 的坐标，使得过P且落在马鞍面S上的直线均平行于平面σ.

解：设所求P点坐标为$P = (a, b, c)$, 满足$a^2 - b^2 = 2c$. 则过P的直线可以表为

$$\ell = \ell(t) = (a, b, c) + t(u, v, w),\ \ u^2 + v^2 + w^2 \neq 0,\ \ t \in \mathbb{R}.$$

直线$\ell(t)$落在马鞍面S上，得到

$$(u^2 - v^2)t^2 + 2(au - bv - w)t = 0, t \in \mathbb{R}.$$

$$au - bv = w,\ \ u^2 - v^2 = 0.$$

于是有

$$v = \varepsilon u,\ \ w = (a - \varepsilon b)u,\ \ \varepsilon = \pm 1.$$

(5分)

于是，过P点恰有两条直线落在马鞍面S上，为

$$\ell_1 = \ell_1(t) = (a, b, c) + tu(1, 1, a - b),$$

$$\ell_2 = \ell_2(t) = (a, b, c) + tu(1, -1, a + b).$$

这两条直线的方向向量$(1, 1, a - b)$和$(1, -1, a + b)$均平行于平面σ, 而平面σ的法向量为$(\alpha, \beta, -1)$. 我们得到

$$\alpha + \beta = a - b,\ \ \alpha - \beta = a + b.$$

(10分)

于是

$$a = \alpha,\ b = -\beta,\ c = \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2).$$

故所求点P的坐标为

$$P = (\alpha, -\beta, \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2)).$$

(15分)

二、(本题 15 分) $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 为n 阶实方阵，满足

1) $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = a > 0$;

2) 对每个$i(i = 1, \ldots, n)$, 有$\sum_{j=1}^{n} \mid a_{ij} \mid + \sum_{j=1}^{n} \mid a_{ji} \mid < 4a$.

求$f(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 的规范形.

解: $f = (x_1, \ldots, x_n)\frac{A+A^T}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 令$B = (b_{ij}) = \frac{A+A^T}{2}$, 则$B$ 为实对称阵，

(2分)

且

$$b_{11} = b_{22} = \cdots = b_{nn} = a;$$

$$\sum_{j=1}^{n} |b_{ij}| = \sum_{j=1}^{n} \mid \frac{a_{ij}}{2} + \frac{a_{ji}}{2} \mid < 2a$$

结果，$b_{ii} > \sum_{j\neq i} |b_{ij}|$. (5分)

若λ为B的特征值， $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ 为关于λ 的非零特征向量，记

$$|x_i| = max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j| > 0.$$

由于 $B\alpha = \lambda\alpha$,

$$\lambda = \frac{\sum_{j=i}^{n} b_{ij}x_j}{x_i} \geqslant a - \sum_{j\neq i} |b_{ij}| > 0.$$

(10分)

故B 为正定矩阵，f 的规范形为$y_1^2+\cdots+y_n^2$.

(15分)

三、（20分）元素皆为整数的矩阵称为整矩阵. 设n 阶方阵A, B 皆为整矩阵.

1) 证明以下两条等价： $i)$ A 可逆且A^{-1} 仍为整矩阵；$ii)$ A 的行列式的绝对值为1.

2) 若又知A, $A-2B$, $A-4B$, ..., $A-2nB$, $A-2(n+1)B$, ..., $A-2(n+n)B$ 皆可逆，且它们的逆矩阵皆仍为整矩阵.证明： $A+B$ 可逆.

证明: 1) $i) \Rightarrow ii)$. 由 $AA^{-1}=I$知$|A|\cdot|A^{-1}|=1$. 注意到$|A|, |A^{-1}|$ 皆为整数. 故A 的行列式的绝对值为1.

$ii) \Rightarrow i)$. 由$AA^*=|A|I$ 知 $A^{-1}=A^*/|A|$ 立即知$i)$ 成立. （10分）

2)考虑多项式$p(x)=|A-xB|^2$. 则由已给条件得 $p(0), p(2), p(4), \ldots, p(4n)$ 的值皆为1. 结果多项式$q(x)=p(x)-1$ 有超过 $2n$ 个的零点，从而得出$q(x)\equiv 0$, 即$p(x)\equiv 1$. 特别地， $p(-1)=|A+B|^2=1$. 故$A+B$ 可逆. 证毕. （20分）

四、（本题15分）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续可微, 在 $x=0$ 处有任意阶导数, $f^{(n)}(0)=0$ $(\forall\, n\geqslant 0)$, 且存在常数 $C>0$ 使得

$$|xf'(x)|\leqslant C|f(x)|, \qquad \forall\, x\in[0,1].$$

证明: (1) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^n}=0$ $(\forall\, n\geqslant 0)$; (2) 在 $[0,1]$ 上成立 $f(x)\equiv 0$.

证明: (1) 由假设, 对任何 $m\geqslant 0$, $f(x)$ 在零点附近有 $m+1$ 阶导数, 从而 $f^{(m)}(x)$ 在 $x=0$ 连续. 因此, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x^0}=f(0)=0$. （2分）

对于 $n\geqslant 1$, 利用 L'Hospital 法则,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x^n}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{nx^{n-1}}=\ldots=\lim_{x\to 0^+}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}=0.$$

（5分）

(2) 我们有

$$xf(x)f'(x)\leqslant x\,|f(x)|\,|f'(x)|\leqslant C|f(x)|^2, \qquad \forall x\in[0,1].$$

从而

$$\Big(\frac{f^2(x)}{x^{2C}}\Big)'=\frac{2\Big(xf(x)f'(x)-Cf^2(x)\Big)}{x^{2C+1}}\leqslant 0, \qquad \forall\, x\in(0,1].$$

（10分）

因此 $\dfrac{f^2(x)}{x^{2C}}$ 在 $(0,1]$ 上单调减少, 从而

$$\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \leqslant \left(\frac{f(t)}{t^C}\right)^2, \qquad \forall\, 0 < t < x \leqslant 1.$$

所以

$$\frac{f^2(x)}{x^{2C}} \leqslant \lim_{t\to 0^+}\left(\frac{f(t)}{t^C}\right)^2 = 0, \qquad \forall\, x \in (0,1].$$

因此, $f(x) \equiv 0$. (15分)

五、（本题15分）设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是两个数列, $a_n > 0 (n \geqslant 1)$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 且

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + b_n, \quad n \geqslant 2.$$

求证: (1) $\frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n$ $(n \geqslant 2)$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证明 (1) 因为 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{n+1}$ $(n \geqslant 2)$, 所以根据条件, 有

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} &\leqslant 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n\ln n} \cdot \frac{1}{n+1} + b_n \\
&< 1 + \frac{1}{n} + \frac{n+1}{n\ln n} \cdot \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + b_n \\
&= \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\ln(n+1)}{\ln n} + b_n.
\end{aligned}$$

(5分)

(2) 令 $c_n = (n\ln n)a_n,\ d_n = \frac{n\ln n}{(n+1)\ln(n+1)} \cdot |b_n|$. 则有

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} < 1 + d_n.$$

取对数, 得

$$\ln c_n - \ln c_{n+1} < \ln(1+d_n) \leqslant d_n.$$

于是

$$\ln c_2 - \ln c_n < \sum_{k=2}^{n-1} d_k,,\ (n \geqslant 3).$$

(10分)

由于 $0 \leqslant d_n < |b_n|$, 从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} d_n$ 收敛. 故, 由上式可知存在常数 c 使得

$$c \leqslant \ln c_n,\ n \geqslant 3.$$

即,

$$a_n \geqslant \frac{e^c}{n \ln n},\ n \geqslant 3.$$

于是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. （15分）

(2) 法二：由条件

$$\begin{aligned} \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} &\leqslant \ln\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n\ln n} + |b_n|\right) \\ &\leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln n} + |b_n|. \end{aligned}$$

从 3 到 n 求和, 然后利用积分的性质可知存在常数 $C > 0$ 使得

$$\begin{aligned} \ln \frac{a_3}{a_{n+1}} &\leqslant \sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k \ln k} + |b_k|\right) \\ &\leqslant C + \ln n + \ln\ln n. \end{aligned}$$

（10分）

于是

$$a_{n+1} \geqslant \frac{a_3 e^C}{n \ln n}.$$

故，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散。 （15分）

六、（本题20分）设 $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ 是一可微函数, 且对所有 $x, y \in \mathbb{R}$, 有

$$|f'(x) - f'(y)| \leqslant |x - y|^{\alpha},$$

其中 $\alpha \in (0, 1]$ 是常数. 求证: 对所有 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$\left|f'(x)\right|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} < \frac{\alpha+1}{\alpha} f(x).$$

证明 对固定的 $x \in \mathbb{R}$, 若 $f'(x) = 0$, 则 (2) 成立. （2分）

若 $f'(x)<0$, 则 $h=(-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}>0$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}
0<f(x+h)&=f(x)+\int_x^{x+h} f'(t)\,dt \\
&=f(x)+\int_x^{x+h} \big(f'(t)-f'(x)\big)\,dt+f'(x)h \\
&\leqslant f(x)+\int_x^{x+h} (t-x)^\alpha\,dt+f'(x)h \\
&=f(x)+\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h.
\end{aligned}$$

故

$$\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}+f'(x)h+f(x)>0. \tag{3}$$

将 $h=(-f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 代入上式, 即得

$$\big|f'(x)\big|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

(11分)

若 $f'(x)>0$, 则记 $h=(f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$. 根据 Newton-Leibniz 公式和条件, 得

$$\begin{aligned}
0<f(x-h)&=-\int_{x-h}^{x} f'(t)\,dt+f(x) \\
&=\int_{x-h}^{x} \big(f'(x)-f'(t)\big)\,dt-f'(x)h+f(x) \\
&\leqslant \int_{x-h}^{x} (x-t)^\alpha\,dt-f'(x)h+f(x) \\
&=\frac{1}{\alpha+1}h^{\alpha+1}-f'(x)h+f(x).
\end{aligned}$$

将 $h=(f'(x))^{\frac{1}{\alpha}}$ 代入上式, 仍得

$$\big(f'(x)\big)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x).$$

总之, 始终有 $\big|f'(x)\big|^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}<\frac{\alpha+1}{\alpha}f(x)$. 证毕. (20分)