2021 年 05 月决赛试题

第十二届全国大学生数学竞赛决赛试题
参考答案及评分标准
（非数学类，2021 年 5 月 15 日）

一、填空题(本题满分 30 分，每小题 6 分)

1、极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin^2\left(1+\frac{k}{n}\right)=$______________.

【解】 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\sin^2\left(1+\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 x\sin^2(1+x)\mathrm{d}x=\frac{1}{8}(2-2\sin 4-\cos 4+\cos 2)$.

2、设 $P_0(1,1,-1)$，$P_1(2,-1,0)$ 为空间的两点，则函数 $u=xyz+e^{xyz}$ 在点 P_0 处沿 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的方向导数为______________.

【解】 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 方向的单位向量为 $\vec{l}=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$，

$$u_x\big|_{P_0}=yz(1+e^{xyz})\big|_{P_0}=-(1+e^{-1}),$$
$$u_y\big|_{P_0}=xz(1+e^{xyz})\big|_{P_0}=-(1+e^{-1}),$$
$$u_z\big|_{P_0}=xy(1+e^{xyz})\big|_{P_0}=1+e^{-1},$$

因此，方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_{P_0}=\frac{2}{\sqrt{6}}(1+e^{-1}).$$

3、记空间曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\ x+y+z=0\end{cases}$ $(a>0)$，则积分 $\oint\limits_{\Gamma}(1+x)^2\mathrm{d}s=$__________.

【解】 利用对称性，得

$$\int_{\Gamma}(1+x)^2\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}(1+2x+x^2)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}\mathrm{d}s+\frac{2}{3}\int_{\Gamma}(x+y+z)\mathrm{d}s+\frac{1}{3}\int_{\Gamma}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

$$=\left(1+\frac{a^2}{3}\right)\int_{\Gamma}\mathrm{d}s=2\pi a\left(1+\frac{a^2}{3}\right).$$

4、设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 16 & \\ & & 1\end{pmatrix}$，且 $|A|>0$，$ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$，其中 I 为单位矩阵，则 $B=$______________.

【解】 由 $AA^*=|A|I$ 及 $|A^*|=16$ 可知，$|A|=4$．对 $ABA^{-1}=BA^{-1}+3I$ 的两边同时左乘 A^{-1} 右乘 A 得 $B=A^{-1}B+3I$，即 $(I-A^{-1})B=3I$，所以

$$B=3(I-A^{-1})^{-1}=3\left(I-\frac{1}{4}A^{*}\right)^{-1}=\begin{pmatrix}4 & & \\ & -1 & \\ & & 4\end{pmatrix}.$$

5、函数 $u=x_1+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{x_3}{x_2}+\dfrac{2}{x_3}(x_i>0,i=1,2,3)$ 的所有极值点为______________.

【解】 利用均值不等式，可知 $u(x_1,\ x_2,\ x_3)\geq 4\sqrt[4]{2}$． 另一方面，有

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}=1-\frac{x_2}{x_1^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x_2}=\frac{1}{x_1}-\frac{x_3}{x_2^2},\quad \frac{\partial u}{\partial x_3}=\frac{1}{x_2}-\frac{2}{x_3^2}.$$

令 $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=0$，$(k=1,2,3)$，即 $1-\dfrac{x_2}{x_1^2}=0$，$\dfrac{1}{x_1}-\dfrac{x_3}{x_2^2}=0$，$\dfrac{1}{x_2}-\dfrac{2}{x_3^2}=0$．由此解得 u 在定义域内的唯一驻点 $P_0(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$，且 u 在该点取得最小值 $u(P_0)=4\sqrt[4]{2}$，这是函数唯一的极值．因此 u 的唯一极值点为 $(2^{\frac{1}{4}},2^{\frac{1}{2}},2^{\frac{3}{4}})$．

【注】 也可用通常的充分性条件(海赛矩阵正定)判断驻点 P_0 为极小值点.

二、**(12 分)** 求极限：$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[4]{\frac{1+2x}{1-2x}}\cdot\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\frac{1+nx}{1-nx}}-1}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}$，**其中 n 为正整数.**

【解】 令 $f(x)=\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\sqrt[4]{\dfrac{1+2x}{1-2x}}\cdot\sqrt[6]{\dfrac{1+3x}{1-3x}}\cdots\sqrt[2n]{\dfrac{1+nx}{1-nx}}$，则 $f(0)=1$，且

------------------- 2 分

$$\ln f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{4}\ln\frac{1+2x}{1-2x}+\frac{1}{6}\ln\frac{1+3x}{1-3x}+\cdots+\frac{1}{2n}\ln\frac{1+nx}{1-nx},$$

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{1+2x}+\frac{2}{1-2x}\right)+\cdots+\frac{1}{2n}\left(\frac{n}{1+nx}+\frac{n}{1-nx}\right),$$

-------------------- 4 分

所以 $f'(0)=n$． -------------------- 2 分

注意到 $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1$，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1$，因此

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{x}{3\pi\arcsin x-(x^2+1)\arctan^3 x}\cdot\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{n}{3\pi}.$$

-------------------- 4 分

2021 年 05 月决赛试题

三、(12 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]x^n$ 的收敛域.

【解】记 $a_n=1-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 当 $n\to\infty$ 时，$a_n\sim\frac{1}{2n}$. 所以

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1.$$ ---------------- 4 分

显然，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. ---------------- 2 分

为了证明 $\{a_n\}$ 是单调递减数列，考虑函数 $f(x)=x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$，$x\geq 1$. 利用不等式：当 $a>0$ 时，$\ln(1+a)>\frac{a}{1+a}$，得

$$f'(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x}>0,$$

即 $f(x)$ 是 $[1,+\infty)$ 上的增函数，所以 $a_n-a_{n+1}=(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)-n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>0$.

根据莱布尼兹审敛法，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛. ---------------- 4 分

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$ 的收敛域为 $[-1,1)$. ---------------- 2 分

四、(12 分) 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内二阶可导，且

$$f(a)=f(b)=0,\quad \int_a^b f(x)\mathrm{d}x=0.$$

(1) 证明：存在互不相同的点 $x_1,x_2\in(a,b)$，使得 $f'(x_i)=f(x_i)$，$i=1,2$；

(2) 证明：存在 $\xi\in(a,b)$，$\xi\neq x_i$，$i=1,2$，使得 $f''(\xi)=f(\xi)$.

【证】 **(1)** 令 $F(x)=\mathrm{e}^{-x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $F(a)=F(b)=0$. 对 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上利用洛尔定理，存在 $x_0\in(a,b)$，使得 $F'(x_0)=0$，即 $f(x_0)=\int_a^{x_0}f(t)\mathrm{d}t$.

---------------- 3 分

再令 $G(x)=f(x)-\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$，则 $G(a)=G(x_0)=G(b)=0$．对 $G(x)$ 分别在 $[a,x_0]$ 与 $[x_0,b]$ 上利用洛尔定理，存在 $x_1\in(a,x_0)$ 及 $x_2\in(x_0,b)$，使得 $G'(x_1)=G'(x_2)=0$，即 $f'(x_i)=f(x_i)$，$i=1,2$，且 $x_1\neq x_2$． ---------------- 3 分

(2) 令 $\varphi(x)=\mathrm{e}^x\left[f'(x)-f(x)\right]$，则 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)=0$，且

$$\varphi'(x)=\mathrm{e}^x\left[f'(x)-f(x)\right]+\mathrm{e}^x\left[f''(x)-f'(x)\right]$$

$$=\mathrm{e}^x\left[f''(x)-f(x)\right].$$ ---------------- 3 分

对 $\varphi(x)$ 在 $[x_1,x_2]$ 上利用洛尔定理，存在 $\xi\in(x_1,x_2)$，使 $\varphi'(\xi)=0$，即 $f''(\xi)=f(\xi)$，显然 $\xi\neq x_i$，$i=1,2$． ---------------- 3 分

五、(12 分) 设 A 是 n 阶实对称矩阵，证明：

(1) 存在实对称矩阵 B，使得 $B^{2021}=A$，且 $AB=BA$；

(2) 存在一个多项式 $p(x)$，使得上述矩阵 $B=p(A)$；

(3) 上述矩阵 B 是唯一的.

【证】(1) 因为 A 是实对称矩阵，所以存在正交矩阵 Q，使得 $A=QDQ^{\mathrm{T}}$，其中 $D=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$，而 $\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ 为矩阵 A 的特征值. -------------- 3 分

令 $B=QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}$，其中 $D^{\frac{1}{2021}}=\mathrm{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2021}},\lambda_2^{\frac{1}{2021}},\cdots,\lambda_n^{\frac{1}{2021}})$，则

$$B^{2021}=(QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}})^{2021}=QDQ^{\mathrm{T}}=A,$$

且满足

$$AB=QDQ^{\mathrm{T}}QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}=QDD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}=QD^{\frac{1}{2021}}DQ^{\mathrm{T}}=QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}QDQ^{\mathrm{T}}=BA.$$

---------------- 3 分

(2) 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 是 A 的所有两两互异的特征值 $(1\le s\le n)$，利用待定系数法及克拉默法则，存在唯一的 s 次多项式 $p(x)=x^s+a_1x^{s-1}+\cdots+a_{s-1}x+a_s$，使得 $p(\lambda_i)=\lambda_i^{\frac{1}{2021}},\ (i=1,2,\cdots,s)$. 因为 $p(D)=D^{\frac{1}{2021}}$，所以

$$p(A)=p(QDQ^{\mathrm{T}})=Qp(D)Q^{\mathrm{T}}=QD^{\frac{1}{2021}}Q^{\mathrm{T}}=B.$$ --------------- 3 分

(3) 设另存在 n 阶实对称矩阵 C 使得 C^{2021}=A，则 $B=p(A)=p(C^{2021})$，所以 $BC=p(C^{2021})C=Cp(C^{2021})=CB$. 由于 B,C 都可相似对角化，故存在 n 阶可逆实矩阵 T 及实对角矩阵 D_1,D_2，使得 $B=TD_1T^{-1}$，$C=TD_2T^{-1}$.因此 $C^{2021}=A=B^{2021}$ $\Rightarrow D_2^{2021}=D_1^{2021}\Rightarrow D_2=D_1\Rightarrow C=B$，唯一性得证. ---------------- 3 分

六、**(12 分)** 设 $A_n(x,y)=\sum\limits_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k$，其中 $0<x,y<1$，证明：

$$\frac{2}{2-x-y}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}\right).$$

【证】 **(方法 1)** 当 $x=y$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,x)}{n+1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}$，等式成立.

---------------- 2 分

当 $x\ne y$ 时，注意到 $A_n(x,y)=A_n(y,x)$，故可设 $0<x<y<1$．因为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{y}{x}\right)^k=\frac{1}{y-x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{y^n-x^n}{n}=\frac{1}{y-x}\ln\frac{1-x}{1-y},$$

所以不等式化为

$$\frac{2}{2-x-y}\le\frac{1}{y-x}\ln\frac{1-x}{1-y}\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}\right).\qquad ①$$

---------------- 6 分

对于 $0\le t<1$，有

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^{2n+1}}{2n+1},\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)=\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n},$$

所以

$$t\le\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t}\le\frac{t}{2}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right).$$

令 $t=\frac{y-x}{2-x-y}$，则 $0<t<1$，代入上式即得所证不等式①. ---------------- 4 分

(方法 2) 因为 $\frac{2}{2-x-y}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n$，$\frac{1}{1-x}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$，所以问题转化为

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A_n(x,y)}{n+1}\le\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(x^n+y^n),$$ ---------------- 4 分

这只需证明：对任意 $n\ge0$，都有 $\left(\frac{x+y}{2}\right)^n\le\frac{A_n(x,x)}{n+1}\le\frac{1}{2}(x^n+y^n)$，其中 $0<x,y<1$.

----------------2 分

用数学归纳法．$n=0,1$ 时，显然．假设 $n=p$ 时，结论成立，当 $n=p+1$ 时，

$$A_{p+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{p+1}x^{p+1-k}y^k=x^{p+1}+yA_p(x,y),$$

$$A_{p+1}(x,y)=\sum_{k=0}^{p+1}x^{p+1-k}y^k=y^{p+1}+xA_p(x,y),$$

$$A_{p+1}(x,y)=\frac{1}{2}(x^{p+1}+y^{p+1})+\frac{1}{2}(x+y)A_p(x,y)=\frac{1}{2}(x^{p+1}+y^{p+1})+\frac{p+1}{2}(x+y)\frac{A_p(x,y)}{p+1} \quad ①$$

$$\le\frac{1}{2}(x^{p+1}+y^{p+1})+\frac{p+1}{2}(x+y)(x^p+y^p)\le\frac{1}{2}(x^{p+1}+y^{p+1})+\frac{p+1}{2}(x^{p+1}+y^{p+1}),$$

---------------- 3 分

所以 $A_{p+1}(x,y)\le\frac{p+2}{2}(x^{p+1}+y^{p+1})$．另一方面，仍由①式及归纳假设，可得

$$A_{p+1}(x,y)\ge\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1}+\frac{p+1}{2}(x+y)\left(\frac{x+y}{2}\right)^p=(p+2)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{p+1},$$

因此，所证不等式对任意 $n\ge 0$ 及 $0<x,y<1$ 都成立． ---------------- 3 分

七、(10 分) 设 $f(x)$，$g(x)$ 是 $[0,1]\to[0,1]$ 的连续函数，且 $f(x)$ 单调增加，求证：

$$\int_0^1 f(g(x))\mathrm{d}x\le\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x.$$

【证】 令 $F(x)=f(x)-x$，则问题转化为证明：

$$\int_0^1[F(g(x))-F(x)]\mathrm{d}x\le\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2},$$ ---------------- 4 分

这只需证明：

$$F_{\max}(x)-\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}，\quad 即 \int_0^1 F(x)\mathrm{d}x\ge F_{\max}(x)-\frac{1}{2}.$$

---------------- 2 分

记 $\max F(x)=F(x_0)=a$，由于 $0\le f(x)\le 1$，则 $-x\le F(x)\le 1-x$，所以 $a\le 1$．

因为 $f(x)$ 单调增加，当 $x\in[x_0,1]$ 时，$f(x)\ge f(x_0)$，即

$$F(x)+x\ge F(x_0)+x_0=a+x_0,$$

所以

$$\int_0^1 F(x)\mathrm{d}x=\int_0^{x_0}F(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1 F(x)\mathrm{d}x\ge\int_0^{x_0}(-x)\mathrm{d}x+\int_{x_0}^1(a+x_0-x)\mathrm{d}x$$

$$=a-\frac{1}{2}+x_0(1-x_0)\ge a-\frac{1}{2}=\max F(x)-\frac{1}{2}.$$

---------------- 4 分