姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

第十二届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案
(数学类低年级组, 2021 年 5 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	20	15	15	20	15	15	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分, 每小题 5 分) 填空题

1. 设 $\Omega:(x-2)^2+(y-3)^2+(z-4)^2\leqslant 1$, 则积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x^2+2y^2+3z^2)\,dxdydz=$ $\underline{\quad\frac{1424\pi}{15}\quad}$.

2. 设 $x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{k^2}}{k}, y_n=\int_0^n e^{x^2}\,dx$, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=$ $\underline{\quad 2\quad}$.

3. 矩阵 $\begin{pmatrix}1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ 的 Jordan 标准型为 $\begin{pmatrix}1&1&&&\\&1&1&&\\&&1&&\\&&&1&1\\&&&&1\end{pmatrix}$.

4. 设 A 为 2021 阶对称矩阵, A 的每一行均为 $1,2,\ldots,2021$ 的一个排列. 则 A 的迹 $\operatorname{tr}A=$ $\underline{\quad 1011\times 2021\quad}$.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 给定 yOz 平面上的圆 $C: y = \sqrt{3} + \cos\theta,\ z = 1 + \sin\theta\ (\theta \in [0, 2\pi])$.

1. 求 C 绕 z 轴旋转所得到的环面 S 的隐式方程.

2. 设 $z_0 \geqslant 0$, 以 $M(0,0,z_0)$ 为顶点的两个锥面 S_1 和 S_2 的半顶角之差为 $\pi/3$, 且均与环面 S 相切 (每条母线都与环面相切), 求 z_0 和 S_1, S_2 的隐式方程.

解答. 1. 由 yOz 平面的圆 C 的参数方程消去参数 θ 可得

$$C: \begin{cases} (y-\sqrt{3})^2 + (z-1)^2 = 1, \\ x = 0, \end{cases}$$

由此可得绕 z 轴旋转获得的环面 S 的方程

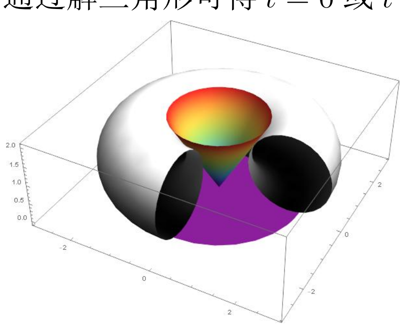
$$(\pm\sqrt{x^2+y^2} - \sqrt{3})^2 + (z-1)^2 = 1,$$

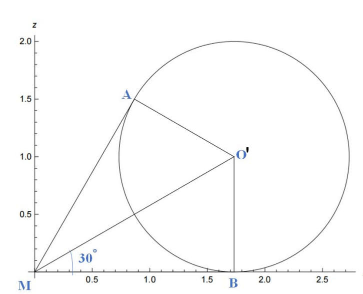
化简得到

$$S:\ (x^2+y^2+(z-1)^2+2)^2 = 12(x^2+y^2).$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (5 分)

2. 记圆 C 的圆心坐标为 $O'(0, \sqrt{3}, 1)$, M 的坐标为 $(0,0,t)$, M 与圆 C 的两个切点坐标分别为 A, B, 则由两个圆锥半顶角之差为 $\frac{\pi}{3}$ 可得 $\angle O'MA = \angle O'MB = \frac{\pi}{6}$, 进而通过解三角形可得 $t = 0$ 或 $t = 2$.

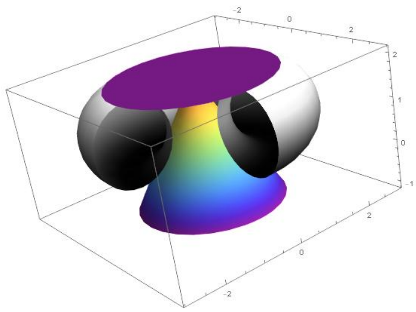


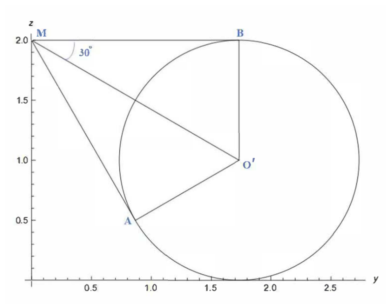


当 $t = 0$ 时, 得 $M(0,0,0)$, 此时切点坐标为 $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}), B(0, \sqrt{3}, 0)$, 锥面 S_1 的母线即为直线 MA, 其方程为 $L_1: \begin{cases} x = 0, \\ \sqrt{3}y - z = 0, \end{cases}$ S_1 即为 L_1 绕 z 轴所得旋转

面，其方程为 $S_1 : z = \sqrt{3(x^2+y^2)}$. 锥面 S_2 的母线即为直线 MB, 其方程为 $L_2 : \begin{cases} x=0, \\ z=0, \end{cases}$ S_2 即为 L_2 绕 z 轴所得旋转面，其方程为 $S_2 : z=0$.

…………………………………………………………………… (11 分)





当 $t=2$ 时, 得 $M(0,0,2)$, 此时切点坐标为 $A(0, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}), B(0, \sqrt{3}, 2)$, 两条母线的方程分别为

$$L_1' : \begin{cases} x=0, \\ \sqrt{3}y+z-2=0 \end{cases} \quad \text{和} \quad L_2' : \begin{cases} x=0, \\ z=2. \end{cases}$$

对应的锥面方程为

$$S_1' : z = 2-\sqrt{3(x^2+y^2)} \quad \text{和} \quad S_2' : z=2.$$

…………………………………………………………………… (15 分)

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 n 阶复方阵 $A_1,\ldots,A_{2n}$ 均相似于对角阵, $\mathbb{C}^n$ 表示复 n 维列向量空间. 证明:

1. $\mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus \operatorname{Im} A_k$. 这里 $\ker A_k=\{\alpha|A_k\alpha=0,\alpha\in\mathbb{C}^n\}$, $\operatorname{Im} A_k=\{A_k\beta|\beta\in\mathbb{C}^n\}$ $(k=1,\ldots,2n)$.

2. 若对所有的 $k<j$ 皆有 $A_kA_j=0\,(k,j=1,2,\ldots,2n)$, 则 $A_1,\ldots,A_{2n}$ 中至少有 n 个矩阵为零矩阵.

证明. 由 A_k 可复对角化可知，存在可逆矩阵 $P_k=(p_1^{(k)},\cdots,p_n^{(k)})$ 使得

$$A_kP_k=\operatorname{diag}(\lambda_1^{(k)},\cdots,\lambda_n^{(k)})P_k.$$

不妨设 $p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}$ 为关于特征值 0 的特征向量，$p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}$ 为关于特征值$\lambda\neq 0$ 的特征向量. 于是, $\ker A_k=\operatorname{span}\{p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}\}$, $\operatorname{Im} A_k=\operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\}$. 这里若 A_k 不以 0 为特征值时, $\ker A_k=0$. 事实上，若 $\dim\ker A_k>t$, 则特征值 0 的代数重数 $>t$, 矛盾. 从而有 $\ker A_k=\operatorname{span}\{p_1^{(k)},\cdots,p_t^{(k)}\}$.

另一方面，$\forall\, y\in\mathbb{C}^n, y$ 可写成 $y=a_1p_1^{(k)}+\cdots+a_np_n^{(k)}$, 结果 $Ay=a_{t+1}\lambda_{t+1}^{(k)}p_{t+1}^{(k)}+\cdots+a_n\lambda_n^{(k)}p_n^{(k)}\in\operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\}$. 从而有 $\operatorname{Im} A_k=\operatorname{span}\{p_{t+1}^{(k)},\cdots,p_n^{(k)}\}$. 故有 $\mathbb{C}^n=\ker A_k\oplus\operatorname{Im} A_k$.

.... (5 分)

现由条件 $A_1A_2=0$ 得 $\operatorname{Im} A_2\subseteq\ker A_1$, 进而有

$$\mathbb{C}^n=(\ker A_1\cap\ker A_2)\oplus\operatorname{Im} A_2\oplus\operatorname{Im} A_1.$$

事实上, 由 $\mathbb{C}^n=\ker A_2\oplus\operatorname{Im} A_2$ 可知， $\forall\, u\in\ker A_1, u=u_1+u_2$, 其中 $u_1\in\ker A_2, u_2\in\operatorname{Im} A_2$. 又由 $\operatorname{Im} A_2\subseteq\ker A_1$ 得 $u_1=(u-u_2)\in\ker A_2\cap\ker A_1$. 结果 $\ker A_1$ 有直和分解：$\ker A_1=(\ker A_2\cap\ker A_1)\oplus\operatorname{Im} A_2$, 于是 $\mathbb{C}^n=(\ker A_1\cap\ker A_2)\oplus\operatorname{Im} A_2\oplus\operatorname{Im} A_1$.

利用 $A_1A_3=0, A_2A_3=0$ 及 $\mathbb{C}^n=\ker A_3\oplus\operatorname{Im} A_3$, 重复前述对 $\ker A_1$ 进行分解的过程又可得

$$\ker A_2\cap\ker A_1=(\ker A_3\cap\ker A_2\cap\ker A_1)\oplus\operatorname{Im} A_3,$$

从而有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \ker A_2 \cap \ker A_3) \oplus \operatorname{Im} A_3 \oplus \operatorname{Im} A_2 \oplus \operatorname{Im} A_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

最后有

$$\mathbb{C}^n = (\ker A_1 \cap \cdots \cap \ker A_{2n}) \oplus \operatorname{Im} A_1 \oplus \cdots \oplus \operatorname{Im} A_{2n}.$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (12 分)

两边取维数得

$$n = \dim(\ker A_1 \cap \cdots \cap \ker A_{2n}) + \operatorname{rank} A_1 + \cdots + \operatorname{rank} A_{2n}.$$

因此 $\operatorname{rank} A_1, \ldots, \operatorname{rank} A_{2n}$ 中至少有 n 个为 0，即 $A_1, \ldots, A_{2n}$ 中至少有 n 个矩阵为零矩阵. 证毕. □

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (15 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 称实函数 f 满足条件 (P): 若 f 在 $[0,1]$ 上非负连续, $f(1)>f(0)=0$, $\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx=+\infty$, 且对任何 $x_1,x_2\in[0,1]$ 成立 $f\big(\frac{x_1+x_2}{2}\big)\geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.

1. 令 $c>0$, 对于 $f_1(x)=cx$ 和 $f_2(x)=\sqrt{x}$, 分别验证 f_1,f_2 是否满足条件 (P), 并计算 $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_1(x)-xf_1'(x)\big)^m e^{f_1'(x)}$ 和 $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_2(x)-xf_2'(x)\big)^m e^{f_2'(x)}$.
2. 证明: $\forall m\geqslant 1$, 存在满足条件 (P) 的函数 f 以及趋于零的正数列 $\{x_n\}$, 使得 f 在每一点 x_n 可导, 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(f(x_n)-x_nf'(x_n)\big)^m e^{f'(x_n)}=+\infty$.

解答. 我们指出, 注意到 $f(x)-xf'(x)=-x^2\big(\frac{f(x)}{x}\big)'$ 对计算与思考是有益的.

1. 易见 f_1,f_2 都在 $[0,1]$ 上非负连续, $f_1(1)>f_1(0)=0$, $f_2(1)>f_2(0)=0$.
   对于 $x>0$, $f_1'(x)=c$, $f_1''(x)=0$, $f_2'(x)=\frac12x^{-1/2}$, $f_2''(x)=-\frac14x^{-3/2}$.
   因此, f_1,f_2 均是 $[0,1]$ 上的凹函数. 由于 $\int_0^1\frac{1}{f_1(x)}\,dx=+\infty$, $\int_0^1\frac{1}{f_2(x)}\,dx<+\infty$,
   所以 f_1 满足条件 (P) 而 f_2 不满足条件 (P).
   另一方面, $f_1(x)-xf_1'(x)\equiv0$, 因此, $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_1(x)-xf_1'(x)\big)^m e^{f_1'(x)}=0$.
   而 $\lim\limits_{x\to0^+}\big(f_2(x)-xf_2'(x)\big)^m e^{f_2'(x)}=\lim\limits_{x\to0^+}\big(\frac{\sqrt{x}}{2}\big)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=+\infty$.
   .... (5 分)

2. 从 1 的结果得到提示, 我们用类似函数 $\sqrt{x}$ 与 cx 的函数来构造想要的例子.
   注意到对于 $(0,1]$ 中严格单调下降并趋于零的点列 $\{a_n\}$, 当函数 f 的图像为依次连接 $(a_n,\sqrt{a_n})$ 的折线且 $f(0)=0$ 时, 条件 (P) 成立.
   于是, 我们可以尝试寻找这样一列 $\{a_n\}$ 以及 $x_n\in(a_{n+1},a_n)$ 以满足题目的要求.

   .... (10 分)

   具体地, 取 $a_0=1$, $x_n\in(a_{n+1},a_n)$ 待定. 我们给出 f 的表达式如下:

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{a_{n+1}}+k_n(x-a_{n+1}), & x\in(a_{n+1},a_n];n\geqslant0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

   其中 $k_n=\dfrac{\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n+1}}}{a_n-a_{n+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}}$.

注意到

$$\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)}\,dx = \frac{1}{2k_n}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} \geqslant \frac{\sqrt{a_n}}{2}\ln\frac{a_n}{a_{n+1}},$$

取 $a_{n+1} = a_n e^{-\frac{2}{n\sqrt{a_n}}}$, 即有 $0 < a_{n+1} < a_n$, 且 $\displaystyle\int_{a_{n+1}}^{a_n} \frac{1}{f(x)}\,dx \geqslant \frac{1}{n}$.

…………………………………………………… (15 分)

另一方面, 在 $(a_{n+1}a_n)$ 内, $f'(x) = k_n \geqslant \frac{1}{2\sqrt{a_n}}$,

$$f(x) - xf'(x) = \frac{\sqrt{a_n}\sqrt{a_{n+1}}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{a_{n+1}}} \geqslant \frac{\sqrt{a_n}e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}.$$

因此, 任取 $x_n \in (a_{n+1}, a_n)$, 均有

$$\varliminf_{n\to+\infty} \big(f(x_n) - x_n f'(x_n)\big)^m e^{f'(x_n)} \geqslant \varliminf_{n\to+\infty} \left(\frac{\sqrt{a_n}e^{-\frac{1}{n\sqrt{a_n}}}}{2}\right)^m e^{\frac{1}{2\sqrt{a_n}}} = +\infty.$$

因此, $\lim\limits_{n\to+\infty} \big(f(x_n) - x_n f'(x_n)\big)^m e^{f'(x_n)} = +\infty$. □

…………………………………………………… (20 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $\alpha,\beta,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 和 A 均为实数. 回答以下问题:

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\sin(n\alpha+\beta)=A$ 成立的充要条件是什么?
2. $\lim\limits_{n\to\infty}\big(\sin(n\alpha_1+\beta_1)+\sin(n\alpha_2+\beta_2)\big)=0$ 成立的充要条件是什么?

解答. 为方便引用, 标记

$$\lim_{n\to\infty}\sin(n\alpha+\beta)=A \tag{1}$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}\big(\sin(n\alpha_1+\beta_1)+\sin(n\alpha_2+\beta_2)\big)=0. \tag{2}$$

法 I. 我们给出如下答案.

1. 满足的条件为: $\sin\alpha=0,\sin\beta=A,\sin(\alpha+\beta)=A$.

2. 满足的条件为:

$$\sin\alpha_2=\pm\sin\alpha_1\neq 0,\cos(\alpha_1\pm\alpha_2)=1,1\pm\cos(\beta_1\mp\beta_2)=0.$$

解答过程.

1. 条件 (1) 等价于

$$\sin((n+2)\alpha+\beta)\to A,\quad n\to\infty. \tag{3}$$

(3)−(1) 并整理得到

$$\sin\alpha\cos(n\alpha+\beta)\to 0,\quad n\to\infty. \tag{4}$$

同理可得

$$\sin^2\alpha\sin(n\alpha+\beta)\to 0,\quad n\to\infty.$$

…………………………………………………………… (3 分)

上式和 (4) 表明，必有 $\sin\alpha=0$，否则

$$\sin(n\alpha_1+\beta_1)\to 0,\quad \cos(n\alpha_1+\beta_1)\to 0,\quad n\to\infty.$$

而矛盾.

再由 (1) 等价于

$$\sin(2n\alpha_1+\beta_1)\to A,\quad \sin(2n\alpha_1+\alpha+\beta_1)\to A,$$

得到

$$\sin\alpha_1=0,\sin\beta_1=\sin(\alpha_1+\beta_1)=A.$$

故 (1) 成立. .... (5 分)

再来证明结论 2. 条件 (2) 等价于

$$\sin((n+2)\alpha_1+\beta_1)+\sin((n+2)\alpha_2+\beta_2)\to 0. \tag{5}$$

(5) − (2) 并整理，得到

$$\sin\alpha_1\cos(n\alpha_1+\beta_1)+\sin\alpha_2\cos(n\alpha_2+\beta_2)\to 0. \tag{6}$$

同理，可得

$$\sin^2\alpha_1\sin(n\alpha_1+\beta_1)+\sin^2\alpha_2\sin(n\alpha_2+\beta_2)\to 0. \tag{7}$$

.... (8 分)

(2) 乘以 $\sin^2\alpha_2$, 减去（7），得到

$$(\sin^2\alpha_2-\sin^2\alpha_1)\sin(n\alpha_1+\beta_1)\to 0.$$

故必有 $\sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1$, 于是有

$$\text{或者}\quad \sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1=0,\quad \text{或者}\quad \sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1\neq 0.$$

若 $\sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1=0$, 即 $\sin\alpha_2=\sin\alpha_1=0$, 代入（2）即得

$$\sin\alpha_1=\sin\alpha_2=0,\sin\beta_1+\sin\beta_2=\sin(\alpha_1+\beta_1)+\sin(\alpha_2+\beta_2)=0.$$

.... (11 分)

若 $\sin^2\alpha_2=\sin^2\alpha_1\neq 0$, 则，$\sin\alpha_2=\pm\sin\alpha_1\neq 0$, 由（6）和（7）得到

$$\sin(n\alpha_1+\beta_1)+\sin(n\alpha_2+\beta_2)\to 0,$$

$$\cos(n\alpha_1+\beta_1)\pm\cos(n\alpha_2+\beta_2)\to 0.$$

上两式等价于右边平方和趋于 0，即

$$A_1^2 + A_2^2 \pm 2A_1A_2\cos(n(\alpha_1 \mp \alpha_2) + (\beta_1 \mp \beta_2)) \to 0.$$

$\leftrightarrow$ 由题（1）$, \sin\alpha_2 = \pm\sin\alpha_1 \neq 0$

$\sin(\alpha_1 \mp \alpha_2) = 0, \Rightarrow \alpha_1 \mp \alpha_2 = 2p\pi$

$1 \pm \cos(\beta_1 \mp \beta_2) = 0,$

从而（2）成立的条件是

$$\sin\alpha_2 = \pm\sin\alpha_1 \neq 0, \cos(\alpha_1 \pm \alpha_2) = 1, 1 \pm \cos(\beta_1 \mp \beta_2) = 0.$$

.... (15 分)

法 II. 问题 1 和 2 都可以视为如下问题的特例:

设 $m \geqslant 2$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 均为实数, $C_1, C_2, \ldots, C_m$ 均为非零复数. 则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{m} C_j e^{ni\lambda_j} = 0$ 成立的充要条件是什么.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{m} C_j e^{ni\lambda_j} = 0$, 则对任何 $\lambda \in \mathbb{R}$, 均有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{m} C_j e^{ni(\lambda_j-\lambda)} = 0$.
进一步, 由 Stolz 公式,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_j e^{ki(\lambda_j-\lambda)} = 0. \tag{8}$$

我们断言, $\lambda_2, \ldots, \lambda_m$ 之中必有一个, 设为 λ_ℓ, 使得 $e^{i(\lambda_\ell-\lambda_1)} = 1$, 即 $\frac{\lambda_\ell-\lambda_1}{2\pi}$ 为整数. 否则, 在 (8) 中取 $\lambda = -\lambda_1$, 得到

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{n} C_j e^{ki(\lambda_j-\lambda_1)} \\ &= C_1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{j=2}^{m} C_j \frac{e^{(n+1)i(\lambda_j-\lambda_1)}-1}{e^{i(\lambda_j-\lambda_1)}-1} = 0. \end{aligned}$$

一般地, 可得

$$e^{i\lambda_1}, e^{i\lambda_2}, \ldots, e^{i\lambda_m} \quad \text{中任何一个必然等于余下 } m-1 \text{ 个中的另一个.} \tag{9}$$

.... (7 分)

1. (1) 化为

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{i\beta}e^{in\alpha}-e^{-i\beta}e^{-in\alpha}-2iA\right)=0.$$

情形 1.1. $A=0$. 此时 $m=2$,

$$\lambda_1=\alpha,\quad \lambda_2=-\alpha,\quad C_1=e^{i\beta},\quad C_2=-e^{-i\beta}.$$

由 (9), $e^{i\alpha}=e^{-i\alpha}$, 进而 $e^{i\beta}=e^{-i\beta}$. 即 $\frac{\alpha}{\pi}, \frac{\beta}{\pi}$ 为整数.

情形 1.2. $A\neq 0$. 此时 $m=3$,

$$\lambda_1=\alpha,\quad \lambda_2=-\alpha,\quad \lambda_3=0,\quad C_1=e^{i\beta},\quad C_2=-e^{-i\beta},\quad C_3=-2iA.$$

由 (9), 此时, 必有 $e^{i\alpha}=e^{-i\alpha}=1$, 进而 $e^{i\beta}-e^{-i\beta}-2iA=0$. 即 $\frac{\alpha}{\pi}$ 为偶数, 且 $A=\sin\beta$.

易见上述条件也是充分的. 总之, 本小题条件成立的充要条件是: 存在整数 k, j 使得

$$\begin{cases} A=0, \\ \alpha=k\pi, \\ \beta=j\pi \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} A=\sin\beta, \\ \alpha=2k\pi. \end{cases}$$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (9 分)

2. 条件 (2) 化为

$$\lim_{n\to\infty}\left(e^{i\beta_1}e^{in\alpha_1}-e^{-i\beta_1}e^{-in\alpha_1}+e^{i\beta_2}e^{in\alpha_2}-e^{-i\beta_2}e^{-in\alpha_2}\right)=0.$$

此时 $m=4$,

$$\lambda_1=\alpha_1,\quad \lambda_2=-\alpha_1,\quad \lambda_3=\alpha_2,\quad \lambda_4=-\alpha_3,$$

$$C_1=e^{i\beta_1},\quad C_2=-e^{-i\beta_1},\quad C_3=e^{i\beta_2},\quad C_4=-e^{-i\beta_2}.$$

于是由 (9), 它们必然可以分为两对, 每一对有相同的值(不排除四个值均相同).

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (11 分)

情形 2.1. $e^{i\lambda_1}=e^{i\lambda_2}=e^{i\lambda_3}=e^{i\lambda_4}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1}{\pi}, \frac{\alpha_2}{\pi}$ 均为整数, 且有相同的奇偶性. 进一步, $C_1+C_2+C_3+C_4=0$, 而这等价于 $\sin\beta_1+\sin\beta_2=0$, 等价于 $\frac{\beta_2-\beta_1}{\pi}$ 是奇数.

情形 2. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_2} \neq e^{i\lambda_3} = e^{i\lambda_4}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1}{\pi}, \frac{\alpha_2}{\pi}$ 均为整数, 但有不同的奇偶性. 进一步, $C_1 + C_2 = C_3 + C_4 = 0$, 而这等价于 $\frac{2\beta_1}{\pi}, \frac{2\beta_2}{\pi}$ 是奇数.

情形 3. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_3} \neq e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_4}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{\pi}$ 为偶数, 但 $\frac{\alpha_1}{\pi}$ 不是整数. 进一步, $C_1 + C_3 = C_2 + C_4 = 0$, 而这等价于 $\frac{\beta_2-\beta_1}{\pi}$ 是奇数.

情形 4. $e^{i\lambda_1} = e^{i\lambda_4} \neq e^{i\lambda_2} = e^{i\lambda_3}$.

这等价于 $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\pi}$ 为偶数, 但 $\frac{\alpha_1}{\pi}$ 不是整数. 进一步, $C_1 + C_4 = C_2 + C_3 = 0$, 而这等价于 $\frac{\beta_2+\beta_1}{\pi}$ 是奇数.

易见上述条件也是充分的. 总之, 本小题条件成立的充要条件是: 存在整数 k, j, p, q, 使得以下四者之一成立

$$\begin{cases} \alpha_1 = k\pi, \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi, \\ \beta_2 = \beta_1 + (2p+1)\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_1 = k\pi, \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi + \pi, \\ \beta_1 = (p + \frac{1}{2})\pi, \\ \beta_2 = (q + \frac{1}{2})\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\pi} \notin \mathbb{Z}, \\ \alpha_2 = \alpha_1 + 2k\pi, \\ \beta_2 = \beta_1 + (2p+1)\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\alpha_1}{\pi} \notin \mathbb{Z}, \\ \alpha_2 = -\alpha_1 + 2k\pi, \\ \beta_2 = -\beta_1 + (2p+1)\pi. \end{cases}$$

.... (15 分)

以上条件可以归并为: 存在整数 k, j, p, q, 以及 $\varepsilon \pm 1$ 使得以下二者之一成立

$$\begin{cases} \alpha_1 = k\pi, \\ \alpha_2 = k\pi + 2j\pi + \pi, \\ \beta_1 = (p + \frac{1}{2})\pi, \\ \beta_2 = (q + \frac{1}{2})\pi, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_2 = \varepsilon\alpha_1 + 2k\pi, \\ \beta_2 = \varepsilon\beta_1 + (2p+1)\pi. \end{cases}$$

得分	
评阅人	

六、(本题 15 分) 设 g 为 $\mathbb{R}$ 上恒正的连续函数, 对于正整数 n 以及 $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$, 考虑微分方程

$$\begin{cases} y'(x) = y^{\frac{1}{2n+1}}(x) g(x), \\ y(x_0) = y_0. \end{cases} \tag{1}$$

证明: 1. 方程 (1) 有定义在整个 $\mathbb{R}$ 上的解(称为**全局解**);

2. 若 $y_0 = 0$, 则方程 (1) 有无穷多个全局解;

3. 若 $y = y(x)$ 是方程 (1) 的解, 则 y 在 $\mathbb{R}$ 上非负, 或在 $\mathbb{R}$ 上非正.

证明. 1. 若 $y_0 = 0$, 则 $y \equiv 0$ 为全局解.

…………………………………………………………… (1 分)

若 $y_0 \neq 0$. 注意到函数 $y = y(x)$ 为方程 (1) 的解当且仅当 $y = -y(x)$ 为方程 (1) 的解, 故不妨设$y_0 > 0$. 在 $y \neq 0$ 的区间内求解 (1) 得到

$$y^{\frac{2n}{2n+1}}(x) = y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x),$$

其中

$$G(x) = \frac{2n}{2n+1} \int_{x_0}^{x} g(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

由于 g 恒正, G 严格单增, 而 $G(x_0) = 0$. 于是 $\alpha = \lim\limits_{x \to -\infty} G(x) \in [-\infty, 0)$.

情形 I. $\alpha + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} \geqslant 0$.

此时 $G(x) + y_0^{\frac{2n}{2n+1}}$ 恒正. 取

$$y(x) = \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x)\right)^{\frac{2n+1}{2n}}, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

即知它为方程 (1) 的全局解.

…………………………………………………………… (3 分)

情形 II. $\alpha + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} < 0$.

此时, 有唯一的 $\gamma \in (-\infty, x_0)$ 使得 $G(\gamma) + y_0^{\frac{2n}{2n+1}} = 0$. 取

$$y(x) = \begin{cases} \left(y_0^{\frac{2n}{2n+1}} + G(x)\right)^{\frac{2n+1}{2n}}, & x > \gamma \\ 0, & x \leqslant \gamma, \end{cases} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

直接计算可得

$$y'_+(\gamma)=\lim_{x\to\gamma^+}\frac{1}{x-\gamma}\Big(y_0^{\frac{2n}{2n+1}}+G(x)\Big)^{\frac{2n+1}{2n}}=g(\gamma)\lim_{x\to\gamma^+}\Big(y_0^{\frac{2n}{2n+1}}+G(x)\Big)^{\frac{1}{2n}}=0,$$

于是 $y'(0)=0$. 进而可知 y 为方程 (1) 的全局解.

. . . . (5 分)

2. 由 1 的结论, 任取 $\gamma\geqslant x_0$, 可见以下函数均是方程 (1) 的全局解

$$y(x)=\begin{cases}\Big(\frac{2n}{2n+1}\int_\gamma^x g(t)\,dt\Big)^{\frac{2n+1}{2n}}, & x>\gamma\\ 0, & x\leqslant\gamma,\end{cases}\qquad \forall\, x\in\mathbb{R},$$

. . . . (10 分)

3. 设 $y(x)$ 是方程 (1) 在区间 I 上的解 (I 不必是 $\mathbb{R}$), 均有

$$\Big(y^2(x)\Big)'=2y(x)y'(x)=2y^{\frac{2n+2}{2n+1}}(x)g(x)\geqslant 0,\qquad \forall\, x\in I.$$

因此, $y^2(x)$ 在 I 上单调增加. 由连续函数的介值定理即知 $y(x)$ 或在 I 上非负, 或在 I 上非正. □

. . . . (15 分)