专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十一届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

(数学类高年级组, 2021 年 4 月)

考试形式: 闭卷　考试时间: 180 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四				总分
满分	20	15	15	20	10	10	10	100
得分								

注意:

1. 第一至第四大题是必答题, 再从第五至第十大题中任选 3 题, 题号要填入上面的表中 (多选无效).
2. 所有答题都须写在此试卷纸密封线右边, 写在其它纸上一律无效.
3. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
4. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、 (本题 20 分)填空题 (每小题 5 分)

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\prod\limits_{k=n}^{3n-1} k\right)^{\frac{1}{2n}} \sin\frac{1}{n} =$ $\underline{\quad\frac{3\sqrt{3}}{e}\quad}$.

2. 已知 f 在区间 $(-1,3)$ 内有二阶连续导数, $f(0)=12, f(2)=2f'(2)+8$，则 $\int_0^1 xf''(2x)\,dx =$ $\underline{\quad 1 \quad}$.

3. 在三维空间的直角坐标系中, 方程 $2x^2+y^2+z^2+2xy-2xz=1$ 表示的二次曲面类型是 <u>椭圆柱面</u>.

4. 在矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ 的奇异值分解 $A=U\Lambda V$ 中(其中 U,V 为正交方阵, Λ 为对角阵), $\Lambda = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 考虑单叶双曲面 $S: x^2-y^2+z^2=1$.

1. 证明: S 上同一族直母线中任意两条不同的直母线是异面直线;

2. 设 S 上同一族直母线中的两条直母线分别经过 $M_1(1,1,1)$ 与 $M_2(2,2,1)$ 两点. 求这两条直母线的公垂线方程以及这两条直母线之间的距离.

证明: 1. 将曲面方程改写为

$$x^2-y^2=1-z^2,$$

从而有

$$(x+y)(x-y)=(1+z)(1-z) \tag{1}$$

现在引进不全为零的参数 λ,μ, 以及不全为零的参数 u,v, 我们得到两族直母线方程

$$\begin{cases} \lambda(x+y)=\mu(1+z) \\ \mu(x-y)=\lambda(1-z) \end{cases} \tag{2}$$

以及

$$\begin{cases} u(x+y)=v(1-z) \\ v(x-y)=u(1+z) \end{cases} \tag{3}$$

....(2 分)

首先以第一族直母线 (2) 为例证明两条不同的直母线是异面直线. 取 (2) 中两条直母线 L_1 与 L_2

$$L_1: \begin{cases} \lambda_1(x+y)=\mu_1(1+z) \\ \mu_1(x-y)=\lambda_1(1-z) \end{cases} \tag{4}$$

以及

$$L_2: \begin{cases} \lambda_2(x+y)=\mu_2(1+z) \\ \mu_2(x-y)=\lambda_2(1-z) \end{cases} \tag{5}$$

其中, $\lambda_1\mu_2\neq\lambda_2\mu_1$.

考虑线性方程组

$$\begin{cases} \lambda_1 x + \lambda_1 y - \mu_1 z - \mu_1 = 0 \\ \mu_1 x - \mu_1 y + \lambda_1 z - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 x + \lambda_2 y - \mu_2 z - \mu_2 = 0 \\ \mu_2 x - \mu_2 y + \lambda_2 z - \lambda_2 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

设 (6) 的系数矩阵为A, 经计算可得

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_1 & -\mu_1 & -\mu_1 \\ \mu_1 & -\mu_1 & \lambda_1 & -\lambda_1 \\ \lambda_2 & \lambda_2 & -\mu_2 & -\mu_2 \\ \mu_2 & -\mu_2 & \lambda_2 & -\lambda_2 \end{vmatrix} = 4(\lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2)^2 \neq 0$$

所以 L_1 与 L_2 为异面直线. ....(5 分)

对于第二族直母线 (3), 设两条直母线 L_1', L_2'

$$L_1' : \begin{cases} u_1(x+y) = v_1(1-z) \\ v_1(x-y) = u_1(1+z) \end{cases} \tag{7}$$

以及

$$L_2' : \begin{cases} u_2(x+y) = v_2(1-z) \\ v_2(x-y) = u_2(1+z) \end{cases} \tag{8}$$

其中 $u_1 v_2 \neq u_2 v_1$.

考虑方程组

$$\begin{cases} u_1 x + u_1 y + v_1 z - v_1 = 0 \\ v_1 x - v_1 y - u_1 z - u_1 = 0 \\ u_2 x + u_2 y + v_2 z - v_2 = 0 \\ v_2 x - v_2 y - u_2 z - u_2 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

设方程组 (9) 的系数矩阵为 B, 经计算得到

$$\det(B)=\begin{vmatrix} u_1 & u_1 & v_1 & -v_1 \\ v_1 & -v_1 & -u_1 & -u_1 \\ u_2 & u_2 & v_2 & -v_2 \\ v_2 & -v_2 & -u_2 & -u_2 \end{vmatrix}=-4(u_1v_2-u_2v_1)^2\neq 0$$

所以 L_1' 与 L_2' 为异面直线. ....(8 分)

2. 将 $M_1(1,1,1)$ 点代入 (2) 中可得 $\mu:\lambda=1:1$, 获得直母线 L_3 的方程

$$L_3:\begin{cases} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \end{cases} \tag{10}$$

将 $M_2(2,2,1)$ 点代入 (2) 中可得 $\mu:\lambda=2:1$, 获得到直母线 L_4 的方程

$$L_4:\begin{cases} x+y-2z=2 \\ 2x-2y+z=1 \end{cases} \tag{11}$$

因为 $(1,1,-1)\times(1,-1,1)=(0,-2,-2)$, 取 L_3 的方向 $\overrightarrow{n_3}=(0,1,1)$. 因为 $(1,1,-2)\times(2,-2,1)=(-3,-5,-4)$, 取 L_4 的方向 $\overrightarrow{n_4}=(3,5,4)$. L_3,L_4 的公垂线 L 的方向为 $\overrightarrow{n}=\overrightarrow{n_3}\times\overrightarrow{n_4}=(-1,3,-3)$. 设 $M(x,y,z)$ 为 L 上的任意一点, 则 L 的方程满足

$$\begin{cases} (\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{n})=0 \\ (\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{n_4},\overrightarrow{n})=0 \end{cases} \tag{12}$$

其中

$$(\overrightarrow{M_1M},\overrightarrow{n_3},\overrightarrow{n})=\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$$(\overrightarrow{M_2M},\overrightarrow{n_4},\overrightarrow{n})=\begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 3 & 5 & 4 \\ -1 & 3 & -3 \end{vmatrix}=0$$

经化简得到公垂线 L 的方程

$$\begin{cases} 6x+y-z=6 \\ 27x-5y-14z=30 \end{cases}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (12 分)

L_3, L_4 之间的距离满足

$$d = \frac{|\overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{n}|}{|\overrightarrow{n}|} = \frac{2}{\sqrt{19}} = \frac{2}{19}\sqrt{19}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (15 分)

注. 经计算可得公垂线与两条直母线 L_3, L_4 的交点分别为 $\frac{1}{19}(19,-3,-3)$ 和 $\frac{1}{19}(17,3,-9)$, 这两点间的距离为 $\frac{2}{19}\sqrt{19}$. 因此, 也可以通过计算两点间的距离得到异面直线之间的距离.

将 $M_1(1,1,1), M_2(2,2,1)$ 分别代入第二族直母线族 (3) 中可得到同一条直母线

$$\begin{cases} 1 - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

即 M_1, M_2 位于同一条直母线上. 因此, 只需考虑 L_3, L_4 的情形. $\square$

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 V 是有限维欧氏空间, V_1, V_2 是 V 的非平凡子空间且 $V = V_1 \oplus V_2$. 设 p_1, p_2 分别是 V 到 V_1, V_2 的正交投影, $\varphi = p_1 + p_2$, 用 $\det\varphi$ 表示线性变换 φ 的行列式. 证明: $0 < \det\varphi \le 1$ 且 $\det\varphi = 1$ 的充要条件是 V_1 与 V_2 正交.

证明: 设 $\dim V_1 = m$, $\dim V_2 = n$, $m, n > 0$. 分别取 V_1 和 V_2 的各一组标准正交基, 它们合起来是 V 的一组基, φ 在这组基下的矩阵形如

$$A = \begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix},$$

其中 B 和 C 分别是 $p_1|_{V_2}: V_2 \to V_1$ 和 $p_2|_{V_1}: V_1 \to V_2$ 的矩阵. ....(3 分)

对于 $v_1 \in V_1$ 和 $v_2 \in V_2$, $v_1 - p_2 v_1 \in V_2^{\perp}$, 故 $\langle p_2 v_1, v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$, 同理 $\langle v_1, p_1 v_2\rangle = \langle v_1, v_2\rangle$. 由 $\langle p_2 v_1, v_2\rangle = \langle v_1, p_1 v_2\rangle$ 可得 $C = B^T$. 从而 $CB = B^T B$ 为半正定矩阵, 它就是 $p_2 p_1|_{V_2}: V_2 \to V_2$ 的矩阵. ....(6 分)

设 λ 为 $p_2 p_1|_{V_2}$ 的一个特征值, $v_2 \in V_2$ 是相应的特征向量, 则 $\lambda \ge 0$ 且由于 $v_2 \notin V_1$, 我们有 $\|p_1 v_2\| < \|v_2\|$, 所以

$$0 \le \lambda\|v_2\|^2 = \langle p_2 p_1 v_2, v_2\rangle = \langle p_1 v_2, p_1 v_2\rangle = \|p_1 v_2\|^2 < \|v_2\|^2,$$

故 $0 \le \lambda < 1$. ....(9 分)

由于 φ 在 V 的一组基下的矩阵为 A, 所以

$$\det\varphi = \det A = \det\begin{pmatrix} I_m & B \\ C & I_n \end{pmatrix} = \det(I_n - CB) = \prod_{\lambda}(1-\lambda),$$

这里 λ 取遍矩阵 CB 的所有特征值 (记重数). 由于 CB 的特征值即 $p_2 p_1|_{V_2}$ 的特征值, 故对 CB 的每个特征值 λ 有 $0 \le \lambda < 1$, 从而 $0 < \det\varphi \le 1$. ....(12 分)

特别地, $\det\varphi = 1$ 当且仅当对 CB 的每个特征值 λ, 均有 $\lambda = 0$, 这也等价于 $CB = B^T B = 0$, 即 $B = C = 0$. 所以 $\det\varphi = 1$ 的充要条件是 V_1 与 V_2 正交.

....(15 分)

得分	
评阅人	

四、(本题 20 分) 证明:

1. 证明: 函数方程 $x^3-3x=t$ 存在三个在闭区间 $[-2,2]$ 上连续, 在开区间 $(-2,2)$ 内连续可微的解 $x=\varphi_1(t)$, $x=\varphi_2(t)$, $x=\varphi_3(t)$ 满足:

$$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\ \varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\quad |t|\leqslant 2.$$

2. 若 f 是 $[-2,2]$ 上的连续偶函数, 证明: $\int_1^2 f(x^3-3x)\,dx=\int_0^1 f(x^3-3x)\,dx$.

证明: 1. 记 $g(x)=x^3-3x$, 那么 g 是奇函数, 且 $g'(x)=3(x^2-1)$. 于是 g 具有如下性质:

(1) 在 $(-\infty,-1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上严格单调上升, 在 $[-1,1]$ 上严格单调下降.

(2) $x=-1$ 是极大值点, 极大值为 2; $x=1$ 是极小值点, 极小值为 -2.

....(4 分)

(3) 记

$$g_1=g|_{[-2,-1]},\quad g_2=g|_{[-1,1]},\quad g_1=g|_{[1,2]}.$$

根据以上性质, g_1,g_2,g_3 分别在其定义的闭区间上严格单调, 且值域均为 $[-2,2]$. 因此, 依次有反函数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$, 以 $[-2,2]$ 为定义域, 依次以 $[-2,-1]$, $[-1,1]$, $[1,2]$ 为值域.

....(7 分)

由反函数的连续性得 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 均为 $[-2,2]$ 上的连续函数. 而 g_1,g_2,g_3 依次在 $(-2,-1)$, $(-1,1)$, $(1,2)$ 内连续可导, 且导数不等于零. 因此, 它们的反函数 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 在 $(-2,2)$ 内连续可微. ....(10 分)

另一方面, 注意到 g 为奇函数, 以及 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ 的值域, g_1,g_2,g_3 的定义域, 我们有

$$-t=-g_3(\varphi_3(t))=-g(\varphi_3(t))=g(-\varphi_3(t))=g_1(-\varphi_3(t)),\qquad t\in[-2,2].$$

因此

$$\varphi_1(-t)=-\varphi_3(t),\qquad t\in[-2,2].$$

同理,

$$-t=-g_2(\varphi_2(t))=-g(\varphi_2(t))=g(-\varphi_2(t))=g_2(-\varphi_2(t)),\qquad t\in[-2,2].$$

从而

$$\varphi_2(-t)=-\varphi_2(t),\qquad t\in[-2,2].$$

. . . .(14 分)

2. 根据韦达定理，我们有

$$\varphi_1(t)+\varphi_2(t)+\varphi_3(t)=0, \qquad \forall\, t\in[-2,2].$$

从而

$$\varphi_1'(t)+\varphi_2'(t)+\varphi_3'(t)=0, \qquad \forall\, t\in(-2,2).$$

. . . . (17 分)

这样结合 f 为连续偶函数得到

$$\begin{aligned}
&2\int_1^2 f(x^3-3x)\,dx-2\int_0^1 f(x^3-3x)\,dx\\
=\;&\int_{-2}^{-1} f(x^3-3x)\,dx-\int_{-1}^{1} f(x^3-3x)\,dx+\int_1^2 f(x^3-3x)\,dx\\
=\;&\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_1'(t)\,dt+\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_2'(t)\,dt+\int_{-2}^{2} f(t)\varphi_3'(t)\,dt=0.
\end{aligned}$$

从而结论成立. . . . . (20 分)

□

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、(本题 10 分) 设 $E \subseteq \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{L}-$ 可测集, $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ 是 E 上一致有界可测函数列, 若 $\sum\limits_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N} \int_E \Big|\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x)\Big|^2 dm < \infty$, 则 $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N} f_n(x) = 0,\ \mathcal{L}-a.e., x \in E.$

证明: 对 $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$ 和 $N \geqslant 1$, 设

$$A_N(\varepsilon) = \Big\{x \in E : \big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\big| \geqslant \varepsilon\Big\}.$$

由于

$$\int_E \Big|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_n(x)\Big|^2 dm \geqslant \varepsilon^2 \cdot m(A_N(\varepsilon)).$$

由题设有 $\sum\limits_{N=1}^{\infty} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N} < +\infty$. ....(2 分)

设

$$N_1 = 1, N_{k+1} = \Big[\frac{N_k}{1-\varepsilon}\Big] + 1, \qquad \forall k \geqslant 1 \tag{1}$$

又设 m_k 是满足 $N_k \leqslant m_k < N_{k+1}$ 的正整数，且 $\frac{m(A_{m_k}(\varepsilon))}{m_k} = \min\limits_{N_k\leqslant N<N_{k+1}} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N}$. 于是

$$\sum_{N_k\leqslant N<N_{k+1}} \frac{m(A_N(\varepsilon))}{N} \geqslant (N_{k+1}-N_k)\frac{m(A_{m_k}(\varepsilon))}{m_k} \geqslant \varepsilon \cdot m(A_{m_k}(\varepsilon)).$$

从而，有

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(A_{m_k}(\varepsilon)) < +\infty. \tag{2}$$

....(5 分)

令

$$A(\varepsilon) = \varlimsup_{k\to\infty} A_{m_k}(\varepsilon) = \bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty} A_{m_k}(\varepsilon) \subset \bigcup_{k=N}^{\infty} A_{m_k}(\varepsilon), \forall N \geqslant 1,$$

$$\Longrightarrow m(A(\varepsilon)) \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} m(A_{m_k}(\varepsilon)) \xrightarrow{(2)} m(A(\varepsilon)) = 0.$$

即对 $\mathcal{L}-a.e., x \in E$ 及充分大的 k, 有

$$\left|\frac{1}{m_k}\sum_{n=1}^{m_k} f_n(x)\right| < \varepsilon. \tag{3}$$

.... (7 分)

又 $\{f_n(x)\}_{n\geqslant 1}$ 在 E 上一致有界, 即 $\exists c>0, \forall x\in E, \forall n\geqslant 1, |f_n(x)|\leqslant c$. $\forall x\in E, N\geqslant 1$, 设 k 是唯一满足 $N_k\leqslant N<N_{k+1}$ 的正整数(其中 N_k 由 (1) 确定).

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)-\frac{1}{m_k}\sum_{n=1}^{m_k}f_n(x)\right|=\left|\frac{1}{N}(\sum_{n=1}^{N}f_n(x)-\sum_{n=1}^{m_k}f_n(x))+(\frac{1}{N}-\frac{1}{m_k})\sum_{n=1}^{m_k}f_n(x)\right|$$
$$\leqslant 2c\frac{N_{k+1}-N_k}{N_k}\leqslant 2c\frac{1}{N_k}(\frac{N_k}{1-\varepsilon}+1-N_k)=\frac{2c\varepsilon}{1-\varepsilon}+\frac{2c}{N_k}$$

当 N 充分大时, 当然有 k 充分大, 此时 $\frac{2c\varepsilon}{1-\varepsilon}+\frac{2c}{N_k}\leqslant 5c\varepsilon$ 及 (3), 即对 $\mathcal{L}-a.e., x\in E$, 有 $\left|\frac{1}{N}\sum\limits_{n=1}^{N}f_n(x)\right|<(1+5c)\varepsilon$, 故

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}f_n(x)=0,\ \ \mathcal{L}-a.e., x\in E.$$

.... (10 分)

专业: ________ 座位号: ________ 考场号: ________ 所在院校: ________ 准考证号: ________ 姓名: ________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

六、(本题 10 分) 设 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant R$ $(R>0)$ 内解析且满足 $|f(z)| \leqslant M$ $(M>0)$, $f(0) \neq 0$. 证明: $f(z)$ 在圆 $|z| \leqslant R/3$ 内的零点个数(零点的重数计算在内)不超过 $\frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}$.

证明： 用 $z_i\,(1 \leqslant i \leqslant n)$ 表示 $f(z)$ 在 $|z| \leqslant R/3$ 内的零点，令

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{z}{z_i}\right)}.$$

....(3 分)

则 $g(z)$ 在 $|z| \leqslant R$ 内解析. 因为在 $|z| = R$ 上，对 $i = 1, 2, \cdots, n$ 都有

$$\left|\frac{z}{z_i}\right| \geqslant 3,$$

于是在 $|z| = R$ 上，

$$|g(Re^{i\theta})| \leqslant \frac{M}{\prod_{i=1}^{n}(3-1)} = 2^{-n}M.$$

从而在 $|z| < R$ 内，有

$$|g(z)| \leqslant 2^{-n}M.$$

....(8 分)

特别地

$$|g(0)| \leqslant 2^{-n}M.$$

又 $g(0) = f(0)$，所以 $|f(0)| \leqslant 2^{-n}M$, 即

$$2^n|f(0)| \leqslant M.$$

对上式两边取对数，得

$$n \leqslant \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{M}{|f(0)|}.$$

....(10 分)

□

得分	
评阅人	

七、(本题 10 分) 证明: 180 阶群不是单群.

证明: 对于素数 p, 用 $n_p(G)$ 表示有限群 G 的 Sylow p-子群个数.

反证, 设 G 为 180 阶单群, 由 $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$ 和 Sylow 定理有 $n_3(G) > 1$, $n_3(G) \mid 20$ 且 $n_3(G) \equiv 1 \pmod 3$, 故 $n_3(G) = 4$ 或 $n_3(G) = 10$.

若 $n_3(G) = 4$, 考虑 G 在它的 Sylow 3-子群集合上的共轭作用, 由此得到 G 到对称群 S_4 的一个同态, 由 G 为单群知这个同态的核只含有单位元, 即此同态为单同态, 从而 $180 = |G| \leq |S_4| = 24$, 矛盾, 故 $n_3(G) = 10$. .... (3 分)

我们断言 G 的任意两个不同的 Sylow 3-子群的交平凡. 若否, 设有 G 的两个不同的 Sylow 3-子群 S, T 使得 $D = S \cap T \neq \{e\}$. 由于 S 和 T 都是 9 阶群, 它们为交换群, 从而 D 为 3 阶群且 $D \trianglelefteq S, T$. 记 $N = N_G(D) = \{g \in G \mid D^g = D\}$ 为 D 在 G 中的正规化子, 则有 $S, T \leq N$, 这样 S 和 T 都是群 N 的 Sylow 3-子群, 从而 N 的 Sylow 3-子群个数 $n_3(N) > 1$. 依然由 Sylow 定理有 $n_3(N) \mid [N : S]$ (这里 $[N : S]$ 表示 S 在 N 中的指数) 和 $n_3(N) \equiv 1 \pmod 3$, 故 $n_3(N) \geq 4$ 且与 3 互素. 由 $n_3(N) \mid |N|$ 和 $|S| \mid |N|$, 我们有 $|N| \geq 36$, 进而 $[G : N] \leq 5$. 考虑 G 在 N 的左陪集集合上的左乘作用, 得到 G 同构于 $S_{[G:N]}$ 的一个子群, 但是 $|G| = 180 > 5! \geq |S_{[G:N]}|$, 矛盾.

.... (5 分)

下面再看 G 的 Sylow 5-子群, 由 $n_5(G) > 1$, $n_5(G) \mid 36$ 和 $n_5(G) \equiv 1 \pmod 5$ 得到 $n_5(G) = 6$ 或者 $n_5(G) = 36$. 由于 G 的 Sylow 5-子群为 5 阶群, 故 G 的任两个不同的 Sylow 5-子群的交平凡. 若 $n_5(G) = 36$, 则 G 的 10 个 Sylow 3-子群和 36 个 Sylow 5-子群至少包含 $10(9-1) + 36(5-1) + 1 = 225 > 180$ 个元素, 矛盾. 故 $n_5(G) = 6$.

.... (7 分)

考虑 G 在它的 6 个 Sylow 5-子群集合上的共轭作用, 类似于前面的讨论, 我们得到一个 G 到对称群 S_6 的单同态, 即 G 同构于 S_6 的一个子群, 不妨设 $G \leq S_6$. 若 G 中有奇置换, 则

$$1 < [G : G \cap A_6] = [GA_6 : A_6] \leq [S_6 : A_6] = 2,$$

即 $G \cap A_6$ 是 G 的指数为 2 的子群, 从而 $G \cap A_6$ 是 G 的非平凡正规子群, 与 G 为单群矛盾, 所以 $G \leq A_6$. 又由

$$[A_6 : G] = |A_6|/|G| = 360/180 = 2$$

得到 $G \trianglelefteq A_6$, 与 A_6 为单群矛盾. .... (10 分)

得分	
评阅人	

八、(本题 10 分) 设 $S: r=r(u,v)$ 为 $\mathbb{R}^3$ 中的光滑曲面, 其第一基本形式为 $(\mathrm{d}s)^2=E(\mathrm{d}u)^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2$, 其中 (u,v) 为曲面 S 的参数, $r_u=\frac{\partial r}{\partial u}$, $r_v=\frac{\partial r}{\partial v}$, $E=r_u\cdot r_u, F=r_u\cdot r_v, G=r_v\cdot r_v$. 证明:

1. 存在新的参数 (u_1,v_1), 使得 S 的第一基本形式为 $(\mathrm{d}s)^2=h(u_1,v_1)[(\mathrm{d}u_1)^2+(\mathrm{d}v_1)^2]$, 其中 $h>0$ 为光滑函数.

2. 如果曲面 S 的第一基本形式满足 $(\mathrm{d}s)^2=h(u,v)[(\mathrm{d}u)^2+(\mathrm{d}v)^2]$, 则其高斯曲率 K 可以表示为 $K=-\frac{1}{2h}\Delta\log h$, 其中 $h>0$ 为光滑函数, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial u^2}+\frac{\partial^2}{\partial v^2}$ 表示拉普拉斯算子.

证明: 1. 曲面S的第一基本形式满足

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}s)^2&=E(\mathrm{d}u)^2+2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v+G(\mathrm{d}v)^2\\
&=\frac{1}{E}\left[E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v+\sqrt{F^2-EG}\mathrm{d}v\right]\left[E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v-\sqrt{F^2-EG}\mathrm{d}v\right].
\end{aligned}
\tag{1}
$$

令 $l=EG-F^2$, 则有 $\sqrt{F^2-EG}=i\sqrt{l}, i^2=-1$. 于是

$$E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v\pm\sqrt{F^2-EG}\mathrm{d}v=E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v\pm i\sqrt{l}\mathrm{d}v$$

由常微分方程理论可知, 存在一个非零(复的)积分因子 λ, 使得 $\lambda(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v+i\sqrt{l}\mathrm{d}v)$ 为某个 (复的)函数 $\mu=u_1+iv_1$ 的全微分, 即有

$$\lambda(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v+i\sqrt{l}\mathrm{d}v)=\mathrm{d}\mu=\mathrm{d}u_1+i\mathrm{d}v_1 \tag{2}$$

对方程 (2) 的两边取共轭, 得到

$$\overline{\lambda}(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v-i\sqrt{l}\mathrm{d}v)=\overline{\mathrm{d}\mu}=\mathrm{d}u_1-i\mathrm{d}v_1 \tag{3}$$

将 (2), (3) 代入 (1), 得到

$$(\mathrm{d}s)^2=h(u_1,v_1)[(\mathrm{d}u_1)^2+(\mathrm{d}v_1)^2] \tag{4}$$

其中, $h(u_1,v_1)=\frac{1}{E|\lambda|^2}$. ....(4 分)

另外, 令 $\lambda=p+iq, p,q$ 均为实数. 由方程 (2) 得到

$$(p+iq)(E\mathrm{d}u+F\mathrm{d}v+i\sqrt{l}\mathrm{d}v)=\mathrm{d}u_1+i\mathrm{d}v_1 \tag{5}$$

由方程 (5) 可得

$$\begin{cases} \mathrm{d}u_1 = p(E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v) - q\sqrt{l}\mathrm{d}v \\ \mathrm{d}v_1 = q(E\mathrm{d}u + F\mathrm{d}v) + p\sqrt{l}\mathrm{d}v \end{cases} \tag{6}$$

由方程组 (6), 该变换的雅可比行列式满足

$$\frac{\partial(u_1, v_1)}{\partial(u, v)} = (p^2 + q^2)E\sqrt{l} > 0$$

于是 (u_1, v_1) 是一组新的参数. ....(5 分)

2. 证法一: 对于曲面$S: r = r(u,v)$, $(\mathrm{d}s)^2 = h(u,v)[(\mathrm{d}u)^2 + (\mathrm{d}v)^2]$. 注意到 $r_u \cdot r_u = E = G = r_v \cdot r_v = h(u,v), F = r_u \cdot r_v = r_v \cdot r_u = 0$, 于是有 $r_{uu} \cdot r_v + r_u \cdot r_{uv} = 0$, $r_{uv} \cdot r_v + r_u \cdot r_{vv} = 0$. 将 r_u, r_v 单位化, 定义

$$e_1 = \frac{r_u}{|r_u|} = \frac{r_u}{\sqrt{E}} = \frac{r_u}{\sqrt{h}},\ e_2 = \frac{r_v}{|r_v|} = \frac{r_v}{\sqrt{G}} = \frac{r_v}{\sqrt{h}},\ n = r_u \times r_v \tag{7}$$

于是, e_1, e_2, n 构成 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基. 因此 r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} 可由该基表示. 例如, 设

$$r_{uu} = ae_1 + be_2 + cn \tag{8}$$

可以获得

$$a = r_{uu} \cdot e_1 = \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u},\ b = r_{uu} \cdot e_2 = -\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v},\ c = r_{uu} \cdot n = L$$

即得到

$$r_{uu} = \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}e_1 - \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}e_2 + Ln \tag{9}$$

类似地, 可以求得

$$r_{uv} = \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}e_1 + \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}e_2 + Mn \tag{10}$$

$$r_{vv} = -\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}e_1 + \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}e_2 + Nn \tag{11}$$

r_{uu}, r_{uv}, r_{vv} 在上述标准正交基下的坐标表示为

$$\begin{cases} r_{uu} = \left(\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}, -\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}, L\right) \\ r_{uv} = \left(\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}, \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}, M\right) \\ r_{vv} = \left(-\frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial u}, \frac{1}{2\sqrt{h}}\frac{\partial h}{\partial v}, N\right) \end{cases} \tag{12}$$

其中, $M = r_{uv} \cdot n, N = r_{vv} \cdot n$.

注意到 $\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial u} = r_{vu} \cdot r_v$, 得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} &= r_{vuu} \cdot r_v + r_{vu} \cdot r_{vu} \\ &= \frac{\partial}{\partial v}\left(r_{uu} \cdot r_v\right) - r_{uu} \cdot r_{vv} + r_{vu} \cdot r_{vu} \end{aligned} \tag{13}$$

利用(8)-(12), 得到

$$r_{uu} \cdot r_v = -\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial v},\ \frac{\partial}{\partial v}(r_{uu} \cdot r_v) = -\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial v^2} \tag{14}$$

$$r_{uu} \cdot r_{vv} = -\frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right] + LN,\ r_{vu} \cdot r_{vu} = \frac{1}{4}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right] + M^2 \tag{15}$$

将 (14), (15) 代入 (13) 得到

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} + \frac{1}{2h}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right] + M^2 - LN$$

或者

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta h &= \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial u^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial v^2} \\ &= \frac{1}{2h}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right] + M^2 - LN \end{aligned} \tag{16}$$

注意到

$$\Delta \log h = -\frac{1}{h^2}\left[\left(\frac{\partial h}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial v}\right)^2\right] + \frac{1}{h}\Delta h \tag{17}$$

结合(16)与(17), 由高斯曲率满足的公式, 得到

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = -\frac{1}{2h}\Delta \log h$$

.... (10 分)

证法二: 当曲面 S 的第一基本形式满足$(\mathrm{d}s)^2 = E(\mathrm{d}u)^2 + G(\mathrm{d}v)^2$时, 可以看出 $F = 0$. 根据曲率张量的定义可以证明

$$R_{1212} = \sqrt{EG}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}}\right)\right] \tag{18}$$

由 (18) 以及高斯曲率的定义, 得到

$$K = -\frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = -\frac{R_{1212}}{EG - F^2} = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial \sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}}\right)\right] \tag{19}$$

其中 $g_{11}=E, g_{12}=F, g_{22}=G$. 既然 $E=G=h, F=0$, 经计算可得

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}}{\sqrt{G}}\right)+\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}}{\sqrt{E}}\right)=\frac{1}{2}\Delta\log h \tag{20}$$

将 (20) 代入 (19), 得到

$$K=-\frac{1}{2h}\Delta\log h$$

……………………………………………………………………(10 分)

□

得分	
评阅人	

九、(本题 10 分) 设 $\{X_i\}$ 是独立随机变量序列.

1. 若 $\{X_i\}$ 服从大数定律且满足中心极限定理, 即 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\xrightarrow{P}0$ 和 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)}}\xrightarrow{D}N(0,1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)=0$;

2. 若 $\{X_i\}$ 同分布且满足 $\lim\limits_{n\to\infty}nP(|X_1|\geqslant n)=0$，则 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu_n$ 依概率收敛于 0，即 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}X_i-\mu_n\xrightarrow{P}0$，其中 $\mu_n=E[X_1I(|X_1|\leqslant n)]$，$I(A)$ 表示事件A 的示性函数.

证明: 1. 由于 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\xrightarrow{P}0$，所以对任意 $\varepsilon>0$,

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\Big|\geqslant\varepsilon\Big)\to 0.$$

于是

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)\Big|\geqslant\varepsilon\Big)=1-P\Big(\frac{|\sum_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)|}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)}}<\frac{n\varepsilon}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)}}\Big)\to 0.$$

利用 $\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i-EX_i)}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)}}\xrightarrow{d}N(0,1)$ 得到$\frac{n\varepsilon}{\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)}}\to\infty$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}(X_k)=0.$$

....(4 分)

2. 记 $Y_{ni}=X_iI(|X_i|\leqslant n)$. 则

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_{ni}-\mu_n)+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iI(|X_i|>n).$$

对任意 $\varepsilon>0$，

$$P\Big(|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_iI(|X_i|>n)|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(|X_i|>n)=nP(|X_1|>n)\to 0.$$

所以

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i I(|X_i|>n) \xrightarrow{P} 0.$$

....(6 分)

于是要证 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i-\mu_n \xrightarrow{P} 0$，只需证明 $P(|\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(Y_{ni}-\mu_n)|\geqslant\varepsilon)\to 0$. 事实上

$$P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_{ni}-\mu_n)\Big|\geqslant\varepsilon\Big)=P\Big(\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_{ni}-EY_{ni})\Big|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\frac{\mathrm{Var}(Y_{n1})}{n\varepsilon^2}\leqslant\frac{EY_{n1}^2}{n\varepsilon^2}.$$

....(7 分)

【方法一】应用分步积分法，得

$$\begin{aligned}\frac{EY_{n1}^2}{n} &= \frac{1}{n}E\big[X_1^2 I(|X_1|\leqslant n)\big]=\frac{1}{n}\int_0^n x^2 dP(|X_1|\leqslant x)=-\frac{1}{n}\int_0^n x^2 dP(|X_1|>x)\\ &= \frac{2}{n}\int_0^n xP(|X_1|>x)dx-nP(|X_1|>n)\\ &= \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} xP(|X_1|>x)dx-nP(|X_1|>n)\\ &\leqslant \frac{2}{n}\Big(1+\sum_{k=2}^{n}kP(|X_1|>k/2)\Big)-nP(|X_1|>n).\end{aligned}$$

由于 $nP(|X_1|>n)\to 0$，所以存在 N，当 $k>N$ 时，$kP(|X_1|>k/2)<\varepsilon$, 于是当 n 较大时

$$\frac{1}{n}\Big(1+\sum_{k=2}^{n}kP(|X_1|>k/2)\Big)=\frac{1}{n}\Big(1+\sum_{k=2}^{N}kP(|X_1|>k/2)+\sum_{k=N+1}^{n}kP(|X_1|>k/2)\Big)<2\varepsilon.$$

则 $\frac{EY_{n1}^2}{n}\to 0$，故 $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu_n\xrightarrow{P} 0$.

....(10 分)

【方法二】

$$\begin{aligned}
\frac{EY_{n1}^2}{n} &= \frac{1}{n}E[X_1^2 I(|X_1| \leqslant n)] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n E[X_1^2 I(j-1 < |X_1| \leqslant j)] \\
&\leqslant \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n j^2 P(j-1 < |X_1| \leqslant j) = \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leqslant j)\int_0^j x dx \\
&= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leqslant j)\sum_{k=1}^j \int_{k-1}^k x dx \\
&\leqslant \frac{2}{n}\sum_{j=1}^n P(j-1 < |X_1| \leqslant j)\sum_{k=1}^j k = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n k\sum_{j=k}^n P(j-1 < |X_1| \leqslant j) \\
&\leqslant \frac{2}{n}\sum_{k=1}^n kP(|X_1| > k-1) \leqslant \frac{2}{n}\Big(1 + \sum_{k=2}^n kP(|X_1| > k/2)\Big).
\end{aligned}$$

由于 $nP(|X_1| > n) \to 0$，所以存在 N，当 $k > N$ 时，$kP(|X_1| > k/2) < \varepsilon$, 于是当 n 较大时,

$$\frac{1}{n}\Big(1+\sum_{k=2}^n kP(|X_1| > k/2)\Big) = \frac{1}{n}\Big(1+\sum_{k=2}^N kP(|X_1| > k/2)+\sum_{k=N+1}^n kP(|X_1| > k/2)\Big) < 2\varepsilon.$$

则 $\frac{EY_{n1}^2}{n} \to 0$, 故 $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i - \mu_n \xrightarrow{P} 0$.

....(10 分)

得分	
评阅人	

十、(本题 10 分) 设 A 是具有正对角元的非奇异对称矩阵. 证明: 若求解线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法对任意初始值都收敛, 则 A 为正定矩阵.

证明： 线性方程组 $Ax=b$ 的 Gauss-Seidel 迭代格式可写为

$$x_{k+1}=(D-L)^{-1}L^Tx_k+(D-L)^{-1}b,$$

其中 $A=D-L-L^T$， $D=\operatorname{diag}(a_{11},a_{22},\cdots,a_{nn})$，

$$L=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ -a_{21} & 0 & & & \\ -a_{31} & -a_{32} & 0 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

……………………………………………………………… (2 分)

将 Gauss-Seidel 格式改写为 $(D-L)x_{k+1}=L^Tx_k+b$. 对任意初始值 x_0, $Ax=b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法都收敛，设其解收敛到 x^*. 记 $y_k=x_k-x^*$，则有 $(D-L)y_{k+1}=L^Ty_k$. 令 $\varepsilon_k=y_k-y_{k+1}$, 注意到 $(D-L)=A+L^T$, 那么

$$(D-L)\varepsilon_k=Ay_k,\quad Ay_{k+1}=L^T\varepsilon_k.$$

……………………………………………………………… (4 分)

于是

$$\begin{aligned} y_k^TAy_k-y_{k+1}^TAy_{k+1} &= y_k^T(D-L)\varepsilon_k-y_{k+1}^TL^T\varepsilon_k \\ &= \varepsilon_k^TDy_k-\varepsilon_k^TL^Ty_k-\varepsilon_k^TLy_{k+1} \\ &= \varepsilon_k^TD\varepsilon_k+\varepsilon_k^T(D-L)y_{k+1}-\varepsilon_k^TL^Ty_k. \end{aligned}$$

又因 $(D-L)y_{k+1}=L^Ty_k$, 所以

$$y_k^TAy_k-y_{k+1}^TAy_{k+1}=\varepsilon_k^TD\varepsilon_k.$$

由题设可知 D 是正定的，因此

$$y_k^TAy_k>y_{k+1}^TAy_{k+1},\quad k\geqslant 0.$$

. . . . (7 分)

下面我们将采用反证法证明若 Gauss-Seidel 迭代收敛，则 A 正定.

反证：假设 A 不正定，不妨设 $b = 0$. 则可找到一个 $x_0 \neq 0$，使得 $x_0^T A x_0 < 0$. 则 $y_0^T A y_0 < 0$. 由 Gauss-Seidel 迭代产生的序列$\{y_n\}$ 满足

$$0 > y_0^T A y_0 > y_1^T A y_1 > y_2^T A y_2 > \cdots > y_n^T A y_n > \ldots.$$

显然该数列不收敛于 0，这与题设矛盾，因此假设不成立, 即 A 正定.

. . . . (10 分).