第十二届全国大学生数学竞赛初赛试题参考答案

（非数学类，2020 年 11 月）

一、（**本题满分 30 分，每小题 6 分**）填空题：

【1】 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=$______________.

【解】 利用等价无穷小：当 $x\to 0$ 时，有 $\sqrt{1-x^3}-1\sim -\dfrac{1}{2}x^3$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)e^{-x^2}}{\sqrt{1-x^3}-1}=-2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=-2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=-\frac{1}{3}.$$

【2】 设函数 $f(x)=(x+1)^n e^{-x^2}$，则 $f^{(n)}(-1)=$______________.

【解】 利用莱布尼兹求导法则，得

$$f^{(n)}(x)=n!e^{-x^2}+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k[(x+1)^n]^{(k)}(e^{-x^2})^{(n-k)},$$

所以 $f^{(n)}(-1)=\dfrac{n!}{e}$.

【3】 设 $y=f(x)$ 是由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}-\dfrac{1}{2}\ln 2+\dfrac{\pi}{4}$ 确定的隐函数，且满足 $f(1)=1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为______________.

【解】 对所给方程两端关于 x 求导，得 $\dfrac{\dfrac{y-xy'}{y^2}}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}=\dfrac{x+yy'}{x^2+y^2}$，即 $(x+y)y'=y-x$，

所以 $f'(1)=0$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1,1)$ 处的切线方程为 $y=1$.

【4】 已知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\dfrac{\pi}{2}$，则 $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{\sin x\sin(x+y)}{x(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______________.

【解】 令 $u=x+y$，得

$$I=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x+y)}{x+y}\mathrm{d}y=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_x^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$$

$$=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u-\int_0^{x}\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u\right)$$

$$=\left(\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right)^2-\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\int_0^x\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u.$$

令 $F(x)=\int_0^x\frac{\sin u}{u}\mathrm{d}u$，则 $F'(x)=\frac{\sin x}{x}$， $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\frac{\pi}{2}$， 所以

$$I=\frac{\pi^2}{4}-\int_0^{+\infty}F(x)F'(x)\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}[F(x)]^2\Big|_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}.$$

【5】 设 $f(x)$，$g(x)$ 在 $x=0$ 的某一邻域 U 内有定义，对任意 $x\in U$，$f(x)\neq g(x)$，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}g(x)=a>0$，则 $\lim\limits_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=$ ________.

【解】 根据极限的保号性，存在 $x=0$ 的一个去心领域 U_1，使得 $x\in U_1$ 时 $f(x)>0$，$g(x)>0$. **当 $x\to0$ 时，有** $e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，利用等价无穷小替换，得

$$\lim_{x\to0}\frac{[f(x)]^{g(x)}-[g(x)]^{g(x)}}{f(x)-g(x)}=\lim_{x\to0}[g(x)]^{g(x)}\frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^{g(x)}-1}{f(x)-g(x)}$$

$$=a^a\lim_{x\to0}\frac{e^{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}-1}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\frac{f(x)}{g(x)}}{f(x)-g(x)}=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\ln\left(1+\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)\right)}{f(x)-g(x)}$$

$$=a^a\lim_{x\to0}\frac{g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}-1\right)}{f(x)-g(x)}=a^a.$$

二、（**本题满分** 10 分）设数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，且 $a_{n+1}=\frac{a_n}{(n+1)(a_n+1)}$， $n\geq1$. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n!a_n$.

【解】 利用归纳法易知 $a_n>0\ (n\geq1)$. 由于

$$\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=(n+1)+(n+1)\frac{1}{a_n}=(n+1)+(n+1)\left(n+n\frac{1}{a_{n-1}}\right)$$

$$=(n+1)+(n+1)n+(n+1)n\frac{1}{a_{n-1}},$$ ………………… 4 分

如此递推，得 $\frac{1}{a_{n+1}}=(n+1)!\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{1}{a_1}\right)=(n+1)!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$， ………………… 3 分

因此

$$\lim_{n\to\infty} n!a_n = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}} = \frac{1}{e}.$$ ……………… 3 分

三、(**本题满分 10 分**)设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，$f(x)$ 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$.

证明： (1) 存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $f(x_0)=2-3x_0$； (2) 存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得 $[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4$.

【解】 (1) 令 $F(x)=f(x)-2+3x$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，且 $F(0)=-2$，$F(1)=2$. 根据连续函数介值定理，存在 $x_0\in(0,1)$ 使得 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=2-3x_0$.

……………… 5 分

(2)在区间 $[0,x_0]$，$[x_0,1]$ 上利用拉格朗日中值定理，存在 $\xi,\eta\in(0,1)$，且 $\xi\neq\eta$，使得

$$\frac{f(x_0)-f(0)}{x_0-0}=f'(\xi)，\quad 且\quad \frac{f(x_0)-f(1)}{x_0-1}=f'(\eta).$$

所以

$$[1+f'(\xi)][1+f'(\eta)]=4.$$ …………… 5 分

四、(**本题满分 12 分**) 已知 $z=xf(\frac{y}{x})+2y\varphi(\frac{x}{y})$，其中 f，φ 均为二次可微函数.

(1) 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$；

(2) 当 $f=\varphi$，且 $\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-by^2$ 时，求 $f(y)$.

【解】 (1) $\frac{\partial z}{\partial x}=f(\frac{y}{x})-\frac{y}{x}f'(\frac{y}{x})+2\varphi'(\frac{x}{y})$， $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{y}{x^2}f''(\frac{y}{x})-\frac{2x}{y^2}\varphi''(\frac{x}{y})$.

…………………… 3 分

(2) $$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right|_{x=a}=-\frac{y}{a^2}f''(\frac{y}{a})-\frac{2a}{y^2}\varphi''(\frac{a}{y})=-by^2.$$

因为 $f=\varphi$，所以 $$\frac{y}{a^2}f''(\frac{y}{a})+\frac{2a}{y^2}f''(\frac{a}{y})=by^2.$$

令 $y=au$，则 $\frac{u}{a}f''(u)+\frac{2}{au^2}f''(\frac{1}{u})=a^2bu^2$，即 $u^3f''(u)+2f''(\frac{1}{u})=a^3bu^4$.

上式中以 $\frac{1}{u}$ 换 u 得 $$2f''(\frac{1}{u})+4u^3f''(u)=2a^3b\frac{1}{u}.$$ ……………… 5 分

联立二式，解得 $-3u^3 f''(u)=a^3b(u^4-\frac{2}{u})$，所以 $f''(u)=\frac{a^3b}{3}(\frac{2}{u^4}-u)$，从而有

$$f(u)=\frac{a^3b}{3}(\frac{1}{3u^2}-\frac{u^3}{6})+C_1u+C_2.$$

故 $f(y)=\frac{a^3b}{3}(\frac{1}{3y^2}-\frac{y^3}{6})+C_1y+C_2$. ………………… 4 分

五、(**本题满分 12 分**) 计算 $I=\oint_\Gamma\left|\sqrt{3}y-x\right|dx-5zdz$，曲线 $\Gamma:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=8\\x^2+y^2=2z\end{cases}$，从 z 轴正向往坐标原点看去取逆时针方向.

【解】 曲线 Γ 也可表示为 $\begin{cases}z=2,\\x^2+y^2=4,\end{cases}$ 所以 Γ 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cos\theta,\\y=2\sin\theta,\\z=2,\end{cases}$ 参数的范围：$0\le\theta\le2\pi$. ………………… 4 分

注意到在曲线 Γ 上 $\mathrm{d}z=0$，所以

$$I=-\int_0^{2\pi}\left|2\sqrt{3}\sin\theta-2\cos\theta\right|2\sin\theta\mathrm{d}\theta=-8\int_0^{2\pi}\left|\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=-8\int_0^{2\pi}\left|\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\right|\sin\theta\mathrm{d}\theta=-8\int_{\frac{\pi}{3}}^{2\pi+\frac{\pi}{3}}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t.\ (\text{代换：}\ t=\theta+\frac{\pi}{3})$$

根据周期函数的积分性质，得 ………………… 4 分

$$I=-8\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\sin\left(t-\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{d}t=-4\int_{-\pi}^{\pi}|\cos t|\left(\sin t-\sqrt{3}\cos t\right)\mathrm{d}t=8\sqrt{3}\int_0^{\pi}|\cos t|\cos t\mathrm{d}t.$$

令 $u=t-\frac{\pi}{2}$，则 $I=-8\sqrt{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|\sin u\mathrm{d}u=0$. ………………… 4 分

六、(**本题满分 12 分**) 证明 $f(n)=\sum_{m=1}^{n}\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}dx$ 等于 n 的所有因子(包括 1 和 n 本身)之和，其中 $[x+1]$ 表示不超过 $x+1$ 的最大整数，并计算 $f(2021)$.

【解】 $\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{m}\int_{k-1}^{k}\cos\frac{2\pi nk}{m}dx=\sum_{k=1}^{m}\cos k\frac{2\pi n}{m}$.

………………… 4 分

如果 m 是 n 的因子，那么 $\int_0^m\cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=m$；否则，根据三角恒等式

$$\sum_{k=1}^{m}\cos kt=\cos\frac{m+1}{2}t\cdot\frac{\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}},$$

有 $\int_0^m \cos\frac{2\pi n[x+1]}{m}\mathrm{d}x=\cos(\frac{m+1}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m})\cdot\frac{\sin(\frac{m}{2}\cdot\frac{2\pi n}{m})}{\sin\frac{2\pi n}{2m}}=0$，因此得证. …………… 5 分

由此可得 $f(2021)=1+43+47+2021=2112$. ………………… 3 分

七、（**本题满分 14 分**）设 $u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\quad(n\ge 1)$.

(1) 证明数列 $\{u_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n$；

(2) 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 条件收敛；

(3) 证明当 $p\ge 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$ 收敛，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$ 的和.

【解】 (1) 对任意 $\varepsilon>0$，取 $0<a<\frac{\varepsilon}{2}$，将积分区间分成两段，得

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\int_0^a\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}+\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}.$$

因为

$$\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\le\frac{1-a}{(1+a^4)^n}<\frac{1}{(1+a^4)^n}\to 0\ \ (n\to\infty)$$

所以存在正整数 N，当 $n>N$ 时，$\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\frac{\varepsilon}{2}$，从而

$$0\le u_n<a+\int_a^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. ………………… 4 分

(2) 显然 $0<u_{n+1}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^{n+1}}\le\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=u_n$，即 u_n 单调递减，又 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，

故由莱布尼兹判别法知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$ 收敛. ………………… 3 分

另一方面，当 $n\ge 2$ 时，有

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}\ge\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^n}=\frac{1}{n-1}(1-2^{1-n}),$$

由于$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$发散，$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\frac{1}{2^{n-1}}$收敛，所以$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)$发散，从而$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散. 因此$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$条件收敛. ………………… 3 分

(3) 先求级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$的和. 因为

$$u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^4)^n}=\left.\frac{t}{(1+t^4)^n}\right|_0^1+n\int_0^1\frac{4t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n}+4n\int_0^1\frac{t^4}{(1+t^4)^{n+1}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2^n}+4n\int_0^1\frac{1+t^4-1}{(1+t^4)^{n+1}}\mathrm{d}t=\frac{1}{2^n}+4n(u_n-u_{n+1}),$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-u_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}+4u_1.$$

利用展开式$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$，取$x=-\frac{1}{2}$，得$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}=\ln 2$. 而

$$u_1=\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{1+t^4}=\frac{\sqrt{2}}{8}[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})]$$

因此 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}=\ln 2+\frac{\sqrt{2}}{2}[\pi+2\ln(1+\sqrt{2})]$.

最后，当$p\geq 1$时，因为$\frac{u_n}{n^p}\leq\frac{u_n}{n}$，且$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n}$收敛，所以$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{n^p}$收敛.

………………… 4 分