2021 年初赛试题及参考解答

第十三届全国大学生数学竞赛初赛试题
参考答案及评分标准
（非数学类，2021 年）

一、填空题（本题满分 30 分，每小题 6 分）

1、极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{x-\ln(e^x+x)}{x}=$ ________.

【解】 原式 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}\dfrac{x-\ln(e^x+x)}{x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\ln\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)=0$.

2、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$ 所确定的二元隐函数，则 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=$ ________.

【解】 将方程两边分别关于 x 和 y 求偏导，得

$$\begin{cases}2\cos(x+2y-3z)\left(1-3\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)=1-3\dfrac{\partial z}{\partial x},\\[2ex] 2\cos(x+2y-3z)\left(2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)=2-3\dfrac{\partial z}{\partial y}.\end{cases}$$

按 $\cos(x+2y-3z)=\dfrac{1}{2}$ 和 $\neq\dfrac{1}{2}$ 两种情形，都可解得：$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{3},\\[2ex] \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2}{3}.\end{cases}$ 因此 $\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

3、设函数 $f(x)$ 连续，且 $f(0)\neq 0$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(x-t)\mathrm{d}t}=$ ________.

【解】 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t}{x\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+2xf(x)-2xf(x)}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t}{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u+xf(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{2xf(\xi)}{xf(\xi)+xf(x)}=1，其中\ \xi\ 介于\ 0,x\ 之间.$$

4、 过三条直线 $L_1:\begin{cases}x=0,\\ y-z=2,\end{cases}$ $L_2:\begin{cases}x=0,\\ x+y-z+2=0,\end{cases}$ 与 $L_3:\begin{cases}x=\sqrt{2},\\ y-z=0\end{cases}$ 的圆柱面方程为____________.

【解】 三条直线的对称式方程分别为

$$L_1:\frac{x}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{1},\quad L_2:\frac{x}{0}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-2}{1},\quad L_2:\frac{x-\sqrt{2}}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z-1}{1},$$

所以三条直线平行.

在 L_1 上取点 $P_1(0,1,-1)$，过该点作与三直线都垂直的平面 $y+z=0$，分别交 L_2，L_3 于点 $P_2(0,-1,1)$，$P_3(\sqrt{2},0,0)$. 易知经过这三点的圆的圆心为 $O(0,0,0)$. 这样，所求圆柱面的中心轴线方程为 $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

设圆柱面上任意点的坐标为 $Q(x,y,z)$，因为点 Q 到轴线的距离均为 $\sqrt{2}$，所以有 $\frac{|(x,y,z)\times(0,1,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\sqrt{2}$，化简即得所求圆柱面的方程为 $2x^2+y^2+z^2-2yz=4$.

5、记 $D=\left\{(x,y)\middle|x^2+y^2\le\pi\right\}$，则 $\iint\limits_D\left(\sin x^2\cos y^2+x\sqrt{x^2+y^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ______.

【解】 根据重积分的对称性，得

$$\text{原式}=\iint\limits_D\sin x^2\cos y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D\sin y^2\cos x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D(\sin x^2\cos y^2+\sin y^2\cos x^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\iint\limits_D\sin(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{\pi}}r\sin r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{\pi}{2}(-\cos r^2)\Big|_0^{\sqrt{\pi}}=\pi.$$

二、(14 分) 设 $x_1=2021$，$x_n^2-2(x_n+1)x_{n+1}+2021=0\ (n\ge1)$，证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

【解】 记 $a=1011$，$y_n=1+x_n$，函数 $f(x)=\frac{x}{2}+\frac{a}{x}\ (x>0)$，则 $y_1=2a$，且

$$y_{n+1}=f(y_n)\ (n\ge1).$$ ------------ 5 分

易知，当 $x>\sqrt{2a}$ 时，$x>f(x)>\sqrt{2a}$，所以$\{y_n\}$是单调减少且有下界的数列，因而收敛. 由此可知$\{x_n\}$收敛 ------------ 5 分

令$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=A$，则 $A>0$ 且 $A=f(A)$，解得 $A=\sqrt{2a}$. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2022}-1$.

------------4 分

三、(14 分)设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是有界连续函数，证明：方程 $y''+14y'+13y=f(x)$ 的每一个解在$[0,+\infty)$上都是有界函数.

【证】 易得对应的齐次方程 $y''+14y'+13y=0$ 的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}.$$ ------------ 4 分

又由 $y''+14y'+13y=f(x)$，得 $(y''+y')+13(y'+y)=f(x)$. 令 $y_1=y'+y$，则 $y_1'+13y_1=f(x)$，解得 $y_1=e^{-13x}\left(\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t+C_3\right)$.

同理，由 $y''+14y'+13y=f(x)$，得$(y''+13y')+(y'+13y)=f(x)$. 令 $y_2=y'+13y$，则 $y_2'+y_2=f(x)$，解得 $y_2=e^{-x}\left(\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t+C_4\right)$.

取 $C_3=C_4=0$，得$\begin{cases} y'+y=e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t, \\ y'+13y=e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t, \end{cases}$由此解得原方程的一个特解为

$$y^*=\frac{1}{12}e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{12}e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t.$$

因此，原方程的通解为

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-13x}+\frac{1}{12}e^{-x}\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t-\frac{1}{12}e^{-13x}\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t.$$ ------------ 6 分

因为 $f(x)$ 在$[0,+\infty)$上有界，所以，存在 $M>0$，使得$|f(x)|\le M, 0\le x<+\infty$，注意到当 $x\in[0,+\infty)$ 时，$0<e^{-x}\le 1, 0<e^{-13x}\le 1$，所以

$$\begin{aligned} |y| &\le |C_1e^{-x}|+|C_2e^{-13x}|+\frac{1}{12}e^{-x}\left|\int_0^x f(t)e^{t}\mathrm{d}t\right|+\frac{1}{12}e^{-13x}\left|\int_0^x f(t)e^{13t}\mathrm{d}t\right| \\ &\le |C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}e^{-x}\int_0^x e^{t}\mathrm{d}t+\frac{M}{12}e^{-13x}\int_0^x e^{13t}\mathrm{d}t \\ &\le |C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}(1-e^{-x})+\frac{M}{12\times 13}(1-e^{-13x}) \\ &\le |C_1|+|C_2|+\frac{M}{12}+\frac{M}{12\times 13}=|C_1|+|C_2|+\frac{7M}{78}. \end{aligned}$$

对于方程的每一个确定的解，常数C_1、C_2是固定的，所以，原方程的每一个解都是有界的. ------------4 分

四、(14 分) 对于 4 次齐次函数

$$f(x,y,z)=a_1x^4+a_2y^4+a_3z^4+3a_4x^2y^2+3a_5y^2z^2+3a_6x^2z^2,$$

计算曲面积分 $\oint\!\!\oint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S$，其中 Σ: $x^2+y^2+z^2=1$.

【解】 因为 $f(x,y,z)$ 为 4 次齐次函数，所以对 $\forall t\in R$，恒有

$$f(tx,ty,tz)=t^4 f(x,y,z).$$

对上式两边关于 t 求导，得

$$xf_1'(tx,ty,tz)+yf_2'(tx,ty,tz)+zf_3'(tx,ty,tz)=4t^3 f(x,y,z).$$

取 $t=1$，得

$$xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)=4f(x,y,z).$$ ------------ 5 分

设曲面 Σ 上点 (x,y,z) 处的外法线方向的方向余弦为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$，则 $\cos\alpha=x,\cos\beta=y,\cos\gamma=z$，因此 ------------ 2 分

$$\oint\!\!\oint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\frac{1}{4}\oint\!\!\oint_{\Sigma}\left(xf_x'(x,y,z)+yf_y'(x,y,z)+zf_z'(x,y,z)\right)\mathrm{d}S$$

$$=\frac{1}{4}\oint\!\!\oint_{\Sigma}\left[\cos\alpha\, f_x'(x,y,z)+\cos\beta\, f_y'(x,y,z)+\cos\gamma\, f_z'(x,y,z)\right]\mathrm{dS}$$

$$=\frac{1}{4}\oint\!\!\oint_{\Sigma} f_x'(x,y,z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+f_y'(x,y,z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+f_z'(x,y,z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{4}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\left[f_{xx}''(x,y,z)+f_{yy}''(x,y,z)+f_{zz}''(x,y,z)\right]\mathrm{dxdydz}$$ (利用高斯公式)

$$=\frac{3}{2}\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\left[x^2\left(2a_1+a_4+a_6\right)+y^2\left(2a_2+a_4+a_5\right)+z^2\left(2a_3+a_5+a_6\right)\right]\mathrm{dxdydz}$$

(利用轮换对称性)

$$=\sum_{i=1}^{6}a_i\iiint_{x^2+y^2+z^2\le 1}\left(x^2+y^2+z^2\right)\mathrm{dxdydz}=\sum_{i=1}^{6}a_i\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^2\cdot\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho$$

$$=\frac{4\pi}{5}\sum_{i=1}^{6}a_i.$$ ------------ 7 分

五、(14 分) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上有连续的二阶导数，证明：

$$\lim_{n\to\infty}n^2\left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)\right]=\frac{(b-a)^2}{24}\left[f'(b)-f'(a)\right].$$

【证】 记 $x_k=a+\dfrac{k(b-a)}{n}$，$\xi_k=a+\dfrac{(2k-1)(b-a)}{2n}$，$k=1,2,\cdots,n$. 将 $f(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上展开成泰勒公式，得

$$f(x)=f(\xi_k)+f'(\xi_k)(x-\xi_k)+\frac{f''(\eta_k)}{2}(x-\xi_k)^2,$$

其中 $x\in[x_{k-1},x_k]$，η_k 介于 0 和 x 之间. 于是 ------------ 4 分

$$B_n=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x-\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(a+\frac{2k-1}{2n}(b-a)\right)=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\big(f(x)-f(\xi_k)\big)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}\left[f'(\xi_k)(x-\xi_k)+\frac{f''(\eta_k)}{2}(x-\xi_k)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\int_{x_{k-1}}^{x_k}f''(\eta_k)(x-\xi_k)^2\mathrm{d}x.$$

设 $f''(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上的最大值和最小值分别为 M_k，m_k，因为

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x-\xi_k)^2\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^3}{12n^3},$$

所以

$$\frac{(b-a)^2}{24}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{b-a}{n}\le n^2B_n\le\frac{(b-a)^2}{24}\sum_{k=1}^{n}M_k\frac{b-a}{n}.$$ ------------ 6 分

因为 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以 $f''(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积. 根据定积分 $\int_0^1 f''(x)\mathrm{d}x$ 的定义，及牛顿-莱布尼兹公式，得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}m_k\frac{b-a}{n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}M_k\frac{b-a}{n}=\int_a^b f''(x)\mathrm{d}x=f'(b)-f'(a).$$

再根据夹逼准则，得

$$\lim_{n\to\infty}n^2B_n=\frac{(b-a)^2}{24}\big[f'(b)-f'(a)\big].$$ ------------ 4 分

六、(14 分) 设 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 均为正实数列，满足：$a_1=b_1=1$，且 $b_n=a_nb_{n-1}-2$，$n=2,3,\cdots$.又设 $\{b_n\}$ 为有界数列，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$ 收敛，并求该级数的和.

【解】 首先，注意到 $a_1=b_1=1$，且 $a_n=\left(1+\dfrac{2}{b_n}\right)\dfrac{b_n}{b_{n-1}}$，所以当 $n\ge 2$ 时，有

$$a_1a_2\cdots a_n=\left(1+\frac{2}{b_2}\right)\left(1+\frac{2}{b_3}\right)\cdots\left(1+\frac{2}{b_n}\right)b_n.$$ ------------ 4 分

由于$\{b_n\}$有界，故存在$M>0$，使得当$n\geq 1$时，恒有$0<b_n\leq M$. 因此

$$0<\frac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=\left(1+\frac{2}{b_2}\right)^{-1}\left(1+\frac{2}{b_3}\right)^{-1}\cdots\left(1+\frac{2}{b_n}\right)^{-1}\leq\left(1+\frac{2}{M}\right)^{-n+1}\to 0,\quad n\to\infty$$

根据夹逼准则，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_n}{a_1a_2\cdots a_n}=0$. ------------ 4 分

考虑级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$的部分和$S_n$，当$n\geq 2$时，有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}=\frac{1}{a_1}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{a_1a_2\cdots a_k}\cdot\frac{a_kb_{k-1}-b_k}{2}$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{b_{k-1}}{a_1a_2\cdots a_{k-1}}-\frac{b_k}{a_1a_2\cdots a_k}\right)$$

$$=\frac{3}{2}-\frac{b_n}{2a_1a_2\cdots a_n},$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{3}{2}$，这就证明了级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{a_1a_2\cdots a_n}$收敛，且其和为$\dfrac{3}{2}$.

------------ 6 分