专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十三届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学 A 类, 2021 年)

考试形式: 闭卷　考试时间: 150 分钟　满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设不全为零的 $a, b, c \in \mathbb{R}$, 求直线 $\dfrac{x-1}{a}=\dfrac{y-1}{b}=\dfrac{z-1}{c}$ 绕z轴旋转所得的旋转曲面方程.

解答. 设点 $M_1(0,0,0)$, 方向 $\vec{s}_1=(0,0,1)$, 则 z 轴为直线 L_1:

$$\frac{x}{0}=\frac{y}{0}=\frac{z}{1}.$$

直线 L_2

$$\frac{x-1}{a}=\frac{y-1}{b}=\frac{z-1}{c}$$

过点 $M_2(1,1,1)$,方向为$\vec{s}_2=(a,b,c)$.

$\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}$ 的混合积为

$$\left(\vec{s}_1, \vec{s}_2, \overrightarrow{M_1M_2}\right)=a-b.$$

…………………………………………………………… (2 分)

(1). 当 $a=b$ 时, L_2 与 L_1 共面. 分以下三种情况讨论.

1). 当 $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0$, 即 $c=0$ 时, L_2 与 L_1 垂直, 此时所得的旋转面是 $z=1$ 的平面.

当 $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2\neq 0$, 即 $c\neq 0$ 时, L_2 与 L_1 平行或者相交于一点, 于是有以下两种情形.

2). 当 L_2 平行于 L_1 时, 所得的旋转曲面是一个圆柱面 $x^2+y^2=2$.

3). 当 L_1 与 L_2 相交于一点时, 所得的旋转面为一个圆锥面, 顶点为它们的交点 $(0,0,\frac{a-c}{a})$ 的锥面方程$x^2+y^2-\frac{2a^2}{c^2}(z-\frac{a-c}{a})=0$.

.... (8 分)

(2). 当 $a\neq b$ 时, 即 L_2 与 L_1 不共面时, 首先考虑 L_2 与 L_1 不垂直时的情形. 设 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 为L_2 上的任意一点, $M(x,y,z)$ 为过 M_0 的旋转曲面上的纬圆上的任意一点, 则有

$$\begin{cases}\overrightarrow{M_0M}\cdot\overrightarrow{s}_1=0,\\ \left|\overrightarrow{M_1M_0}\right|=\left|\overrightarrow{M_1M}\right|,\\ \frac{x_0-1}{a}=\frac{y_0-1}{b}=\frac{z_0-1}{c}.\end{cases}$$

由此得到

$$\begin{cases}z-z_0=0,\\ x^2+y^2+z^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2,\\ x_0=1+at,\\ y_0=1+bt,\\ z_0=1+ct,\end{cases}$$

其中 $t\in\mathbb{R}$ 为参数. 因 L_1 与 L_2 不垂直, 由 $\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=c\neq 0$, 得到 $t=\frac{z_0-1}{c}=\frac{z-1}{c}$, 以及

$$\begin{aligned}x^2+y^2=&x_0^2+y_0^2\\ =&\left[1+\frac{a}{c}(z-1)\right]^2+\left[1+\frac{b}{c}(z-1)\right]^2\\ =&Az^2+Bz+C,\end{aligned}$$

其中

$$A=\frac{a^2+b^2}{c^2},\ B=\frac{a(c-a)+b(c-b)}{c^2},\ C=\frac{(c-a)^2+(c-b)^2}{c^2}.$$

经计算可得

$$AC-B^2=\frac{(a-b)}{c^2}>0.$$

注意到 $A>0$, 以及

$$\begin{aligned} x^2+y^2 =& Az^2+2Bz+C \\ =& A\left(z+\frac{B}{A}\right)^2+\frac{AC-B^2}{A} \end{aligned}$$

得到

$$\frac{A}{AC-B^2}\left(x^2+y^2\right)-\frac{A^2}{AC-B^2}\left(z+\frac{B}{A}\right)=1.$$

它是旋转单叶双曲面.

…………………………………………………………… (13 分)

当 L_1 与 L_2 为异面直线而且垂直时, $c=0$. 所得旋转曲面是一个挖去一个圆盘(半径为 L_1 与 L_2 之间的距离 $\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}}$) 的平面.

…………………………………………………………… (15 分)

姓名:______ 准考证号:______ 所在院校:______ 考场号:______ 座位号:______ 专业:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $B \subset R^n\,(n \geq 2)$ 是单位开球，函数 u, v 在 $\overline{B}$ 上连续, 在 B 内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1 - u^2 - v^2)u = 0, & x \in B, \\ -\Delta v - (1 - u^2 - v^2)v = 0, & x \in B, \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B, \end{cases}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, ∂B 表示 B 的边界. 证明: $u^2(x) + v^2(x) \leq 1\,(\forall\, x \in \overline{B})$.

证明. 记 $w = w(x) = u^2(x) + v^2(x)$, 则 w 满足问题

$$\begin{cases} -\Delta w - 2(1 - w)w = -2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2), & x \in B, \\ w(x) = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \tag{1}$$

…………………………………………………… (6 分)

显然，$w(x) \in C^2(B) \bigcap C(\overline{B})$. 所以，$w(x)$ 必然在 $\overline{B}$ 上达到最大值. 设最大值点为 x_1.

若 $x_1 \in B$, 则 $\nabla w(x_1) = 0$, $-\Delta w(x_1) \geq 0$. 于是由（1）得到, 在 x_1 处，

$$0 \leq -\Delta w \leq 2(1 - w)w - 2(|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2) \leq 2(1 - w)w.$$

…………………………………………………… (12 分)

而 $w(x_1) \geq 0$, 故上式表明 $w(x_1) \leq 1$.

若 $x_1 \in \partial B$, 则由（1），$w(x_1) = 0$.

综合之，恒有 $0 \leq w \leq 1, x \in \overline{B}$.

…………………………………………………… (15 分)

□

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为整系数多项式, $a_0 \neq 0$. 设对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 证明: $f(x) = 0$ 的根不可能全为实数.

证明. 设 $f(x) = 0$ 的 2021 个根分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$. 由于 $a_0 \neq 0$, 所以 $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2021$. 若 $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ 都是实数, 由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \cdot \frac{1}{x_i}\right)^2 = 2021^2.$$

.... (5 分)

由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i = -a_{2020}, \qquad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2019},$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i\right)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq 2021} x_i x_j = a_{2020}^2 - 2a_{2019}.$$

注意到 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_{2021}}$ 是多项式

$$g(x) = x^{2021} f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^{2021} + a_1x^{2020} + a_2x^{2019} + \cdots + a_{2019}x^2 + a_{2020}x + 1$$

的根. 继续由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad \sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_2}{a_0},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2\sum_{1 \leq i < j \leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}.$$

.... (10 分)

因为对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 又 a_0 为非零整数, 故 $|a_0| \geq 1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = (a_{2020}^2 - 2a_{2019})\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}\right) \leq (40^2 + 2 \cdot 40)(40^2 + 2 \cdot 40) = 1680^2,$$

矛盾. 证毕 .... (15 分)

□

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 P 为对称酉矩阵, 证明: 存在可逆复矩阵 Q 使得 $P = \overline{Q}Q^{-1}$.

解答. 设 P 为 n 阶矩阵. 因为 P 为酉矩阵, 自然为正规矩阵, 所以存在酉矩阵 U 使得 $U^{-1}PU = D$ 为对角阵.

.... (2 分)

设

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix},$$

并设 $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$ 为复数满足 $\beta_i^2 = \alpha_i, 1 \le i \le n$, 令

$$E = \begin{pmatrix} \beta_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}.$$

由 Lagrange 插值公式知存在复系数多项式 $f(x)$ 使得 $f(\alpha_i) = \beta_i, 1 \le i \le n$, 从而

$$E = \begin{pmatrix} f(\alpha_1) & & & \\ & f(\alpha_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f(\alpha_n) \end{pmatrix} = f(D),$$

且

$$E^2 = \begin{pmatrix} \beta_1^2 & & & \\ & \beta_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix} = D.$$

.... (10 分)

现在 $D^T = D, P^T = P, U^T = \overline{U}^{-1}$, 所以

$$D = D^T = (U^{-1}PU)^T = U^TP^T(U^{-1})^T = \overline{U}^{-1}P\overline{U} = \overline{U}^{-1}UDU^{-1}\overline{U},$$

从而 $U^{-1}\overline{U}$ 与 D 可交换. 又 $E = f(D)$, 所以 E 也与 $U^{-1}\overline{U}$ 可交换, 即 $EU^{-1}\overline{U} = U^{-1}\overline{U}E$, 或写为

$$UEU^{-1} = \overline{U}E\overline{U}^{-1}.$$

.... (15 分)

由于 P 为酉矩阵, 即 $\overline{P}^TP = I$, 这里 I 为单位矩阵, 再由 U 也是酉矩阵得到

$$\overline{D}D = \overline{D}^TD = \overline{U^{-1}PU}^TU^{-1}PU = \overline{U}^T\overline{P}^T(\overline{U}^{-1})^TU^{-1}PU = \overline{U}^TU = I.$$

所以对任意 $1 \le i \le n$, $\overline{\alpha_i}\alpha_i = 1$, 即复数 α_i 的模为 1, 从而复数 β_i 的模也是 1, 故 $\overline{\beta_i} = \beta_i^{-1}$, 由此得到 $\overline{E} = E^{-1}$. 令 $Q = U\overline{E}U^{-1}$, 则显然 Q 可逆且有 $\overline{Q} = \overline{U}E\overline{U}^{-1} = UEU^{-1}$, 又 $Q^{-1} = U\overline{E}^{-1}U^{-1} = UEU^{-1}$, 所以

$$\overline{Q}Q^{-1} = (UEU^{-1})^2 = UE^2U^{-1} = UDU^{-1} = P.$$

.... (20 分)

□

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设 $\alpha > 1$, 证明:

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx.$

(2) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin x^3 \, dx \cdot \int_0^{+\infty} \sin x^{\frac{3}{2}} \, dx.$

解答. (1) 证明: 对于 $s > 0$ 以及 $0 \leqslant a < b \leqslant +\infty$, 我们有

$$\begin{aligned} \int_a^b e^{-sx} \sin x \, dx &= \operatorname{Im} \int_a^b e^{-(s-i)x} \, dx = \operatorname{Im} \frac{e^{-(s-i)a} - e^{-(s-i)b}}{s-i} \\ &= \frac{se^{-sa} \sin a - se^{-sb} \sin b + e^{-sa} \cos a - e^{-sb} \cos b}{s^2+1}. \end{aligned} \tag{1}$$

…………………………………………………………… (2 分)

由 (1),

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^{2\alpha}+1} \, dt$$

收敛.

…………………………………………………………… (4 分)

任取 $A > \varepsilon > 0$, 由 Weierstrass 判别法, $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dt$ 关于 $x \in [\varepsilon, A]$ 一致收敛, 因此, 结合 (1),

$$\begin{aligned} & \left| \int_\varepsilon^A dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dt - \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx \right| \\ = & \left| \int_0^{+\infty} dt \int_\varepsilon^A e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx - \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx \right| \\ \leqslant & \left| \int_0^{+\infty} \left(\left| \int_A^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx \right| + \left| \int_0^\varepsilon e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx \right| \right) dt \\ \leqslant & \left| \int_0^{+\infty} \frac{|t^\alpha e^{-t^\alpha A} \sin A + e^{-t^\alpha A} \cos A| + |-t^\alpha e^{-t^\alpha \varepsilon} \sin \varepsilon + 1 - e^{-t^\alpha \varepsilon} \cos \varepsilon|}{t^{2\alpha}+1} \, dt \right. \\ \leqslant & \left| \int_0^{+\infty} \left(e^{-t^\alpha A} + |\sin \varepsilon| + |1 - e^{-t^\alpha \varepsilon} \cos \varepsilon| \right) \frac{t^\alpha + 1}{t^{2\alpha}+1} \, dt. \right. \end{aligned}$$

利用一致收敛性, 或控制收敛定理, 得到

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x} \sin x \, dx.$$

…………………………………………………………… (8 分)

(2) 对于 $\alpha > 1$, 以及 $x > 0$, 有

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha x}\,dt = \frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{\alpha}-1}e^{-s}\,ds = \frac{1}{\alpha}x^{-\frac{1}{\alpha}}\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big).$$

以及

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^\alpha+1}\,dt &= \frac{1}{\alpha}\int_0^1 s\Big(\frac{1}{s}-1\Big)^{\frac{1}{\alpha}-1}\frac{1}{s^2}\,ds\\ &= \frac{1}{\alpha}B\Big(1-\frac{1}{\alpha},\frac{1}{\alpha}\Big) = \frac{\pi}{\alpha\sin(\frac{\pi}{\alpha})}.\end{aligned}$$

.... (11 分)

从而

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\sin x^\alpha\,dx &= \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty}x^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\sin x\,dx\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)}\int_0^{+\infty}dx\int_0^{+\infty}e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}x}\sin x\,dt\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)}\int_0^{+\infty}dt\int_0^{+\infty}e^{-t^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}x}\sin x\,dx\\ &= \frac{1}{(\alpha-1)\Gamma\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{t^{\frac{2\alpha}{\alpha-1}}+1}\,dt\\ &= \frac{\pi}{2\alpha\Gamma\big(1-\frac{1}{\alpha}\big)\sin\frac{(\alpha-1)\pi}{2\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\Gamma\Big(\frac{1}{\alpha}\Big)\sin\frac{\pi}{2\alpha}.\end{aligned}$$

最后得到

$$\int_0^{+\infty}\sin x^3\,dx\cdot\int_0^{+\infty}\sin x^{\frac{3}{2}}\,dx = \frac{1}{3}\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big)\sin\frac{\pi}{6}\cdot\frac{2}{3}\Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big)\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{9}.$$

.... (15 分)

注: 可以利用第二型曲线积分计算, 对于 $\alpha > 1$, 在以 0 为顶点的锥形区域

$$D := \big\{re^{i\theta}\big|r > 0, \theta\in(0,\beta)\big\}$$

内, 定义 $\mathrm{Ln}\,z$ 如下:

$$\mathrm{Ln}\,(\mathrm{re}^{\mathrm{i}\theta}) = \ln\mathrm{r} + \mathrm{i}\theta, \qquad \forall\,\mathrm{re}^{\mathrm{i}\theta}\in\mathrm{D},$$

其中 $\beta = \frac{\pi}{2\alpha}$. 则易见 $\mathrm{Ln}\,z$ 可以连续地把定义域延伸到 D 的边界. 又易见, 在 D 内成立 $\mathrm{Ln}\,z$ 在 D 内解析.

令 $z^\alpha := e^{\alpha \,\mathrm{Ln\, z}}, (z \in \overline{D})$, 则 e^{iz^α} 在 D 内解析在 $\overline{D}$ 上连续.
任取 $R > 0$, 考虑 $D_R := B_R(0) \cap D$, 则 $\int_{\partial D_R} e^{iz^\alpha}\, dz = 0$. 由此即得

$$
\begin{aligned}
& \int_0^R e^{ix^\alpha}\, dx = \int_0^R e^{ir^\alpha e^{i\alpha\beta}} e^{i\beta}\, dr - \int_0^\beta e^{iR^\alpha e^{i\alpha\theta}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta \\
= \;& e^{i\beta} \int_0^R e^{-r^\alpha \sin(\alpha\beta)} e^{ir^\alpha \cos(\alpha\beta)}\, dr - i \int_0^\beta Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta}\, d\theta \\
= \;& e^{\frac{\pi i}{2\alpha}} \int_0^R e^{-r^\alpha}\, dr - i \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta}\, d\theta.
\end{aligned}
$$

易见有常数 $C > 0$ 使得

$$
\begin{aligned}
& \Big| i \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)} e^{iR^\alpha \cos(\alpha\theta)} e^{i\theta}\, d\theta \Big| \\
\leqslant \;& \Big| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-R^\alpha \sin(\alpha\theta)}\, d\theta \Big| \leqslant \Big| \int_0^{\frac{\pi}{2\alpha}} Re^{-CR^\alpha \theta}\, d\theta \Big| \leqslant \frac{1}{CR^{\alpha-1}}.
\end{aligned}
$$

于是, 可得

$$
\int_0^{+\infty} e^{ix^\alpha}\, dx = e^{\frac{i\pi}{2\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-r^\alpha}\, dr = \frac{1}{\alpha}\Gamma\big(\frac{1}{\alpha}\big) e^{\frac{i\pi}{2\alpha}}.
$$

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 f, g 为 $\mathbb{R}$ 上的非负连续可微函数, 满足: $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f'(x) \geqslant 6 + f(x) - f^2(x)$, $g'(x) \leqslant 6 + g(x) - g^2(x)$. 证明:

(1) $\forall \varepsilon \in (0,1)$ 以及 $x \in \mathbb{R}$, 存在 $\xi \in (-\infty, x)$ 使得 $f(\xi) \geqslant 3 - \varepsilon$.

(2) $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $f(x) \geqslant 3$.

(3) $\forall x \in \mathbb{R}$, 存在 $\eta \in (-\infty, x)$ 使得 $g(\eta) \leqslant 3$.

(4) $\forall x \in \mathbb{R}$, 成立 $g(x) \leqslant 3$.

解答. (1) 任取 $\varepsilon \in (0,1)$ 以及 $x \in \mathbb{R}$, 若结论不真, 则 $f(t) \leqslant 3 - \varepsilon\,(\forall\, t \leqslant x)$. 因此,

$$f'(t) \geqslant 6 + f(t) - f^2(t) = (3 - f(t))(2 + f(t)) \geqslant 2\varepsilon, \qquad \forall\, t \leqslant x.$$

于是

$$f(x) - f(t) \geqslant 2\varepsilon(x - t), \qquad \forall\, t \leqslant x.$$

从而 $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = -\infty$. 与 f 非负矛盾.

因此, 存在 $\xi < x$ 使得 $f(\xi) \geqslant 3 - \varepsilon$.

…………………………………………………………… (5 分)

(2) 任取 $x \in \mathbb{R}$, 由连续性, 我们只要证明对任何 $\varepsilon \in (0,1)$, 成立 $f(x) \geqslant 3 - \varepsilon$. 由 (1), 存在 $\xi < x$ 使得 $f(\xi) \geqslant 3 - \varepsilon$. 令 $h(t) = f(t) - (3 - \varepsilon)$, 我们有

$$h'(t) = f'(t) \geqslant (3 - f(t))(2 + f(t)) \geqslant -(2 + f(t))h(t), \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

记 $F(t) = \int_0^t (2 + f(s))\,ds$, 则

$$\big(e^{F(t)}h(t)\big)' = e^{F(t)}\big(h'(t) + (2 + f(t))h(t)\big) \geqslant 0, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

因此,

$$e^{F(x)}h(x) \geqslant e^{F(\xi)}h(\xi) \geqslant 0.$$

因此, $h(x) \geqslant 0$. 即 $f(x) \geqslant 3 - \varepsilon$.

…………………………………………………………… (10 分)

(3) 任取 $x \in \mathbb{R}$, 若结论不真, 则 $g(t) > 3\,(\forall\, t < x)$. 因此,

$$g'(t) \leqslant 6 + g(t) - g^2(t) = -(g(t) - 3)^2 - 5(g(t) - 3) \leqslant -(g(t) - 3)^2, \qquad \forall\, t < x.$$

于是

$$\frac{g'(t)}{(g(t) - 3)^2} \leqslant -1, \qquad \forall\, t \leqslant x.$$

不等式两边在 $[t,x]$ 上积分, 得到

$$\frac{1}{g(t)-3}-\frac{1}{g(x)-3}\leqslant t-x,\qquad \forall\, t<x.$$

进而

$$-\frac{1}{g(x)-3}\leqslant t-x,\qquad \forall\, t<x.$$

在上式令 $t\to-\infty$ 即得矛盾. 因此, 存在 $\eta\in(-\infty,x)$ 使得 $g(\eta)\leqslant 3$.

.... (17 分)

(4) 任取 $x\in\mathbb{R}$, 由 (3), 存在 $\eta\in(-\infty,x)$ 使得 $g(\eta)\leqslant 3$. 我们有

$$(g(t)-3)'\leqslant-(g(t)-3)(2+g(t)),\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}.$$

因此,

$$\left(e^{G(t)}(g(t)-3)\right)'=e^{G(t)}\left((g(t)-3)'+(2+g(t))(g(t)-3)\right)\leqslant 0,\qquad \forall\, t\in\mathbb{R},$$

其中 $G(t)=\int_0^t(2+g(s))\,ds$. 从而

$$e^{G(x)}(g(x)-3)\leqslant e^{G(\eta)}(g(\eta)-3)\leqslant 0.$$

因此, $g(x)\leqslant 3$. . $\square$

.... (20 分)