专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十三届全国大学生数学竞赛预赛试卷参考答案
(数学 B 类, 2021 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	20	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在标准答题纸上, 写在本试卷或其它纸上均无效.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 设球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$, 求以点 $M_0(0,0,a)(a\in\mathbb{R},\ |a|>1)$ 为顶点的与 S 相切的锥面方程.

解答. 解法一:

设 L 为过顶点 $M_0(0,0,a)$, 方向为 $\vec{s}=(l,m,n)$, 与 S 相切的锥面上的任意一条母线, 则对于 L 上任意一点$M(x,y,z)$, L 的方程可以表示为

$$\frac{x-0}{l}=\frac{y-0}{m}=\frac{z-a}{n},$$

其中 $l,m,n\in\mathbb{R}$ 不全为零. 设 L 的参数方程为

$$\begin{cases} x=lt, \\ y=mt, \\ z=a+nt, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $t\in\mathbb{R}$ 为参数.

将直线的参数方程 (1) 代入 S 中可得

$$(l^2+m^2+n^2)t^2+2ant+a^2-1=0.$$

由直线 L 与球面 S 相切的条件可知

$$(2an)^2-4(l^2+m^2+n^2)(a^2-1)=0,$$

亦即

$$(l^2+m^2)a^2=(l^2+m^2+n^2). \tag{2}$$

…………………………………………………………… (12 分)

由 (1) 和 (2) 消去参数 t 可得锥面方程

$$(a^2-1)(x^2+y^2)-(z-a)^2=0,$$

其中 $|a|>1$.

…………………………………………………………… (15 分)

解法二：

设 $O(0,0,0)$ 为球心坐标, $M(x,y,z)$ 为切锥面与球面的切点, 半顶角为 $\alpha=\angle(\overrightarrow{M_0O},\overrightarrow{M_0M})$, 则有 $\sin\alpha=\frac{1}{|a|}$.

…………………………………………………………… (7 分)

注意到

$$\cos^2\alpha=\frac{|\overrightarrow{M_0O}\cdot\overrightarrow{M_0M}|^2}{|\overrightarrow{M_0O}|^2|\overrightarrow{M_0M}|^2},\ \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,$$

得到

$$\frac{(z-a)^2}{x^2+y^2+(z-a)^2}=\frac{a^2-1}{a^2},$$

即

$$(a^2-1)(x^2+y^2)-(z-a)^2=0,$$

其中 $|a>1|$.

…………………………………………………………… (15 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $B \subset R^n\,(n \geq 2)$ 是单位开球，函数 u, v 在 $\overline{B}$ 上连续, 在 B 内二阶连续可导, 满足

$$\begin{cases} -\Delta u - (1-u^2-v^2)u = 0, & x \in B, \\ -\Delta v - (1-u^2-v^2)v = 0, & x \in B, \\ u(x) = v(x) = 0, & x \in \partial B, \end{cases}$$

其中, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$, ∂B 表示 B 的边界. 证明: $u^2(x) + v^2(x) \leq 1\,(\forall\, x \in \overline{B})$.

证明. 记 $w = w(x) = u^2(x) + v^2(x)$, 则 w 满足问题

$$\begin{cases} -\Delta w - 2(1-w)w = -2(|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2), & x \in B, \\ w(x) = 0, & x \in \partial B. \end{cases} \tag{1}$$

…………………………………………………… (6 分)

显然，$w(x) \in C^2(B) \bigcap C(\overline{B})$. 所以，$w(x)$ 必然在 $\overline{B}$ 上达到最大值. 设最大值点为 x_1.

若 $x_1 \in B$, 则 $\nabla w(x_1) = 0$, $-\Delta w(x_1) \geq 0$. 于是由（1）得到, 在 x_1 处，

$$0 \leq -\Delta w \leq 2(1-w)w - 2(|\nabla u|^2 + |\nabla u|^2) \leq 2(1-w)w.$$

…………………………………………………… (12 分)

而 $w(x_1) \geq 0$, 故上式表明 $w(x_1) \leq 1$.

若 $x_1 \in \partial B$, 则由（1），$w(x_1) = 0$.

综合之，恒有 $0 \leq w \leq 1, x \in \overline{B}$.

…………………………………………………… (15 分)

□

得分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $f(x) = x^{2021} + a_{2020}x^{2020} + a_{2019}x^{2019} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0$ 为整系数多项式, $a_0 \neq 0$. 设对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 证明: $f(x) = 0$ 的根不可能全为实数.

证明. 设 $f(x) = 0$ 的 2021 个根分别为 $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$. 由于 $a_0 \neq 0$, 所以 $x_i \neq 0$, $1 \leq i \leq 2021$. 若 $x_1, x_2, \ldots, x_{2021}$ 都是实数, 由 Cauchy 不等式有

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i \cdot \frac{1}{x_i}\right)^2 = 2021^2.$$

…………………………………………………………… (5 分)

由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i = -a_{2020}, \qquad \sum_{1\leq i<j\leq 2021} x_ix_j = a_{2019},$$

由此得到

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{2021} x_i\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 2021} x_ix_j = a_{2020}^2 - 2a_{2019}.$$

注意到 $\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \ldots, \frac{1}{x_{2021}}$ 是多项式

$$g(x) = x^{2021} f\left(\frac{1}{x}\right) = a_0x^{2021} + a_1x^{2020} + a_2x^{2019} + \cdots + a_{2019}x^2 + a_{2020}x + 1$$

的根. 继续由 Vieta 定理,

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i} = -\frac{a_1}{a_0}, \qquad \sum_{1\leq i<j\leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_2}{a_0},$$

所以

$$\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = \left(\sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i}\right)^2 - 2\sum_{1\leq i<j\leq 2021} \frac{1}{x_i} \cdot \frac{1}{x_j} = \frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}.$$

…………………………………………………………… (10 分)

因为对任意 $0 \leq k \leq 2020$ 有 $|a_k| \leq 40$, 又 a_0 为非零整数, 故 $|a_0| \geq 1$, 所以

$$\sum_{i=1}^{2021} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{2021} \frac{1}{x_i^2} = (a_{2020}^2 - 2a_{2019})\left(\frac{a_1^2}{a_0^2} - \frac{2a_2}{a_0}\right) \leq (40^2 + 2\cdot 40)(40^2 + 2\cdot 40) = 1680^2,$$

矛盾. 证毕 …………………………………………………… (15 分)

□

专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、 (本题 20 分) 设 $R=\{0,1,-1\}$, S 为 R 上的 3 阶行列式全体, 即 $S=\{\det(a_{ij})_{3\times 3}|a_{ij}\in R\}$. 证明：$S=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

解答. 首先，通过直接检验可知

$$\begin{vmatrix} 0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0 \end{vmatrix}=0,\begin{vmatrix} 1&0&0\\ 0&1&0\\ 0&0&1 \end{vmatrix}=1,\begin{vmatrix} 1&0&0\\ 0&1&-1\\ 0&1&1 \end{vmatrix}=2,\begin{vmatrix} 1&-1&0\\ 1&1&-1\\ 0&1&1 \end{vmatrix}=3,\begin{vmatrix} 1&1&1\\ 1&-1&1\\ 1&1&-1 \end{vmatrix}=4.$$

.... (5 分)

其次，由于交换两行，行列式值改变符号，因此有 $\Gamma\supseteq\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$.

.... (10 分)

第三，我们证明: $\forall(a_{ij})_{3\times3}, a_{ij}\in R$,总有$|\det(a_{ij})|\leqslant 4$.
事实上，由对角线法则可知

$$\det(a_{ij})=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{32}a_{21}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{32}a_{23}$$

记

$$b_1=a_{11}a_{22}a_{33}, b_2=a_{12}a_{23}a_{31}, b_3=a_{13}a_{32}a_{21},$$

$$b_4=-a_{13}a_{22}a_{31}, b_5=-a_{12}a_{21}a_{33}, b_6=-a_{11}a_{32}a_{23}.$$

直接观察可知：每个a_{ij} 在单项 b_1,b_2,b_3,b_4,b_5,b_6 中共出现两次，且

$$b_1b_2b_3b_4b_5b_6=-a_{11}^2a_{12}^2a_{13}^2a_{21}^2a_{22}^2a_{23}^2a_{31}^2a_{32}^2a_{33}^2.$$

因此立即可得：若有某个 $a_{ij}=0$, 则 $b_1,\ldots,b_6$ 中至少有两个为 0，从而 $|\det(a_{ij})|\leqslant 4$. 倘若每个$a_{ij}$ 都不等于 0, 则由 $a_{ij}=\pm1$ 得 $b_1,\ldots,b_6$ 之积 $=-1$，从而至少有一个 b_i 为 -1，同时也至少有一个 b_j 为 1，否则与 $b_1b_2b_3b_4b_5b_6=-1$ 矛盾. 结果 b_i 与 b_j 互相抵消，仍有 $|\det(a_{ij})|\leqslant 4$.
至此，综上所得，$\Gamma=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$，$\Gamma$ 共由 9 个元素所组成.

.... (20 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 15 分) 设函数 f 在 $[-1,1]$ 内有定义，在 $x=0$ 的某邻域内连续可导, 且$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$. 证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 收敛, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 发散.

证明. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=a>0$, 知 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$。又 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续可导，则 $f(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$.

.... (3 分)

于是 $0<a=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(0)$. 由于 $f'(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，存在正数 $\delta>0$, 使得 $\forall x\in[0,\delta]$, 有 $f'(x)>0$ 因此, 在 $[0,\delta]$ 上 $f(x)$ 单调增加.

.... (8 分)

于是存在正整数 $N>\frac{1}{\delta}$，当 $n>N$ 时, $f\big(\dfrac{1}{n}\big)>0$ 且 $f\big(\dfrac{1}{n}\big)>f\big(\dfrac{1}{n+1}\big)$. 由 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$，知 $\lim\limits_{N\to\infty}f\big(\dfrac{1}{n}\big)=0$, 且 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 为交错级数，由莱布尼兹判别法，级数 $\sum\limits_{n=N}^{\infty}(-1)^n f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 收敛，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 收敛.

.... (12 分)

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散, 而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\big(\frac{1}{n}\big)}{1/n}=a>0$, 故 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f\big(\dfrac{1}{n}\big)$ 发散.

.... (15 分)

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $f(x)=\ln\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$. 证明函数 f 在 $(-\infty,0)$ 内为严格凸的，并且对任意 $\xi\in(-\infty,0)$, 存在 $x_1,x_2\in(-\infty,0)$ 使得

$$f\,'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

(称 (a,b) 内的函数 S 为严格凸的, 如果对任何 $\alpha\in(0,1)$, 以及 $x,y\in(a,b), x\neq y$ 成立 $S(\alpha x+(1-\alpha)y)<\alpha S(x)+(1-\alpha)S(y)$.)

证明. 记 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}$. 我们有

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)},\quad f''(x)=\frac{g''(x)g(x)-(g'(x))^2}{g^2(x)}.$$

又因为

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n},\quad g''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}.$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (4 分)

于是, 由 Hölder 不等式,

$$g''(x)g(x)-(g'(x))^2=\left(\sum_{n=1}^{\infty}e^{nx}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n^2}\right)-\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{nx}}{n}\right)^2>0,$$

从而函数 $f(x)$ 为严格凸的.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (10 分)

记 $h(x)=f(x)-(f(\xi)+f'(\xi)(x-\xi))$. 则 $h''(x)>0$ 及 $h'(\xi)=h(\xi)=0$. 于是函数 $h(x)$ 在 $(-\infty,\xi)$ 上严格递减, 在 $(\xi,0)$ 上严格增加. 任取 $a\in(-\infty,\xi), b\in(\xi,0)$. 则 $h(a)>0, h(b)>0$. 取 $c\in(0,\min\{h(a),h(b)\})$, 则存在 $x_1\in(a,\xi), x_2\in(\xi,b)$ 使得 $h(x_1)=h(x_2)=c$.

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (16 分)

于是

$$\begin{aligned}0&=h(x_2)-h_2(x_1)=f(x_2)-(f(\xi)+f'(\xi)(x_2-\xi))-f(x_1)+f(\xi)+f'(\xi)(x_1-\xi)\\&=f(x_2)-f(x_1)-f'(\xi)(x_2-x_1)\end{aligned}$$

于是

$$f\,'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (20 分)