2021 年第十三届全国大学生数学竞赛初赛补赛（数学类 B 卷）试题及参考解答

【说明】：这套试卷是因为疫情影响部分赛区延迟比较后的统一竞赛试卷

一、(15 分) 在空间直角坐标系 $Oxyz$ 中，设 $P=(a,b,c)$ 为第一卦限中的点(即 $a,b,c>0$)。求过 P 点的平面 σ 的方程，它分别交 $x-$轴，$y-$轴和 $z-$轴的正轴于 A,B 和 C 三点，并使得 P 恰为三角形 ABC 的重心.

【参考证明】：设 $n=(\alpha,\beta,\gamma)$ 为所求平面 σ 的法方向，则 σ 的方程可写为

$$\alpha(x-a)+\beta(y-b)+\gamma(z-c)=0.$$

因为平面交 $x-$轴，$y-$轴和 $z-$轴的正轴于 A,B 和 C 三点，故 $\alpha\beta\gamma\neq 0$ 且交点为

$$A=\left(\frac{1}{\alpha}(a\alpha+b\beta+c\gamma),0,0\right)$$
$$B=\left(0,\frac{1}{\beta}(a\alpha+b\beta+c\gamma),0\right)$$
$$C=\left(0,0,\frac{1}{\gamma}(a\alpha+b\beta+c\gamma)\right)$$

由于 P 恰为三角形 ABC 的重心，故 $\frac{1}{3}(A+B+C)=P$. 从而有

$$a\alpha+b\beta+c\gamma=3a\alpha=3b\beta=3c\gamma=k$$

故 $\alpha=\frac{k}{3a},\beta=\frac{k}{3b},\gamma=\frac{k}{3c}$. 代入平面方程，得到平面 σ 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=3.$$

二、(15 分) 计算积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x-x^2+x^3-x^4+\cdots-x^{2018}}{(1+x)^{2021}}\,\mathrm{d}x.$$

【参考证明】：容易知道，当 $1\leq k\leq 2018$ 时，

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2021}}\,\mathrm{d}x$$

收敛. 令 $x=\frac{1}{t}$，则

$$I_k=\int_0^{+\infty}\frac{t^{-k}}{\left(1+t^{-1}\right)^{2021}}\frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^{2019-k}}{(1+t)^{2021}}\,\mathrm{d}t$$

即 $\int_0^{+\infty}\frac{x^k}{(1+x)^{2021}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2019-k}}{(1+x)^{2021}}\,\mathrm{d}x$，从而有

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^{2k+1}}{(1+x)^{2021}}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{x^{2018-2k}}{(1+x)^{2021}}\,\mathrm{d}x$$

故由积分的线性运算性质，得

$$\text{原积分} = \sum_{k=0}^{1008}\int_0^{+\infty}\frac{x^{2k+1}-x^{2018-2k}}{(1+x)^{2021}}\mathrm{d}x = 0$$

三、(15 分) 设 $R=\{0,1,4,9,16\}$，U 为 R 上的 3 阶方阵全体:

$$U=\left\{\left(a_{ij}\right)_{3\times 3} \mid a_{ij}\in R\right\}.$$

例如，$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$便为 U 中的两元. 现设 S 为 U 的一个了集. 证明：若 S 的元素个数多于 5^9-5^3-18，则必存在不同的 $A,B\in S$ 使得 $AB=BA$.

【参考证明】：设 $|E|$ 表示集合 $E\subseteq\mathbb{R}^{n\times n}$ 的元素个数. 显然有 $|U|=5^9$. 又记

$$D=\{M \mid M\in U, M\text{为对角阵}\},$$

则 $|D|=5^3$. 再记

$$J=\left\{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}^3\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&9&9\\9&9&9\\9&9&9\end{pmatrix}\right\}$$

则 $|J|=2$. 现记

$$L_0=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\},S_0=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_1=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\},S_1=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_2=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}\right\},S_2=\left\{\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_3=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&9\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&9\end{pmatrix}\right\},S_3=\left\{\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}9&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$L_4=\left\{\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&4&0\\0&1&0\\0&0&16\end{pmatrix}\right\},S_4=\left\{\begin{pmatrix}16&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}16&0&0\\0&1&0\\0&4&1\end{pmatrix}\right\}.$$

令 $L=L_0\cup L_1\cup L_2\cup L_3\cup L_4, H=S_0\cup S_1\cup S_2\cup S_3\cup S_4$，则 L 中的元素乘法可换，H 中的元素乘法也可换. 注意到 D,J,L,H 两两互不相交.

令 $T=D\cup J\cup L\cup H$，则

$$|U \setminus T| = 5^9 - 5^3 - 22.$$

现倘若 S 中任意两不同元素皆不可换. 考察

$$S = (S \cap T) \cup (S \cap (U \setminus T)).$$

结果

$$|S| = |S \cap T| + |S \cap (U \setminus T)| \leq |S \cap T| + |U \setminus T|.$$

由于 D, J, L, H 这 4 个集合中每个集合都是乘法可换集，故有

$$|S \cap T| \leq 4$$

因为，否则的话导致 $|S \cap T| \geq 5$，从而 D, J, L, H 这 4 个集合中必有一个集合包含 S 中的两个不同元素，从而该两元素可换，不可能. 故

$$|S| \leq 4 + 5^9 - 5^3 - 22 = 5^9 - 5^3 - 18$$

矛盾. 证毕.

四、(20 分) 设 $a_1, \ldots, a_n$ 为和为 1 的 n 个正数 $(n \geq 2)$，$A = \left(a_{ij}\right)_{n \times n}$ 为 n 阶方阵，其每一行均是 $a_1, \ldots, a_n$ 的一个排列.

(1) 设 V_1 表示 A 关于特征值 1 的复特征向量空间，试计算 V_1 的维数并给出 V_1 的一组基.

(2) 证明：1 作为 A 的特征值，其代数重数也为 1.

【参考证明】：(1) 由 A 的生一行的行和皆为 1 可知：

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$$

故 1 是 A 的特征值，$\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix} \in V_1$. 其次，

$$\forall v = \begin{pmatrix}z_1\\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix} + i\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix} \in V_1$$

其中 $z_1, \ldots, z_n, \xi_1, \ldots, \xi_n \in \mathbb{R}$，则有

$$A\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}z_1\\ \vdots \\ z_n\end{pmatrix}, A\begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \vdots \\ \xi_n\end{pmatrix}$$

断言：$z_1 = \cdots = z_n$ 和 $\xi_1 = \cdots = \xi_n$，从而 v 可表为:

$$v = \left(\mu_1 + \mu_2 i\right)\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}.$$

事实上，取 $\mu = z_{i_0} = \max\left\{z_1, \cdots, z_n\right\}$，则 $\mu \geq z_i, i = 1, \cdots, n$. 若存在某个 $\mu \geq z_i$ 为严格不等式，不妨设 $\mu > z_n$. 于是

$$A\left(\mu\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\right)=A\begin{pmatrix}\mu-z_1\\ \vdots\\ \mu-z_n\end{pmatrix}\triangleq\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix},$$

上式中的每个y_i均大于0，因为A的元素皆是正数，且

$$\mu-z_1\geq 0,\dots,\mu-z_{n-1}\geq 0,$$

而$\mu-z_n>0$.

另一方面，由$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\in V_1,\begin{pmatrix}z_1\\ \vdots\\ z_n\end{pmatrix}\in V_1$知，

$$A\begin{pmatrix}\mu-z_1\\ \vdots\\ \mu-z_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\mu-z_1\\ \vdots\\ \mu-z_n\end{pmatrix}$$

从而有$0=\mu-z_{i_0}=y_{i_0}>0$矛盾. 故有$z_1=\cdots=z_n$. 类似可证，$\xi_1=\cdots=\xi_n$.

故V_1的维数等于1，其一组基为$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

(2) 由于1的几何重数为1，从而A关于1的 Jordan 块只有1个. 假设1的代数重数不为1，则A关于1的 Jordan 块就不是1阶的.

设A关于1的 Jordan 块为J_1. 取A 的 Jordan 分解为

$$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$$

其中$P=(p_1,p_2,\dots)$为n阶可逆阵. 于是

$$A(p_1,p_2,\dots)=(p_1,p_2,\dots)\begin{pmatrix}J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_s\end{pmatrix}$$

注意到1的几何重数为1，因此$\exists c\in\mathbb{C}$使得$cp_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$. 分别让$q_1,q_2$为

$$q_1=\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix},q_2=\mathrm{Re}(cp_2)$$

则有

$$A\left(cp_1,cp_2,\cdots\right)=\left(cp_1,cp_2,\cdots\right)\begin{pmatrix}1&1&&\\&1&&\\&&\ddots&*\\&&&*\end{pmatrix}$$

从而有 $Aq_1=q_1, A\left(cp_2\right)=q_1+\left(cp_2\right)$. 将 cp_2 表示为 $cp_2=q_2+i\eta_2,\eta_2\in\mathbb{R}^n$，因此又有

$$A\left(q_2+i\eta_2\right)=q_1+q_2+i\eta_2$$
$$Aq_2+iA\eta_2=\eta_1+q_2+i\eta_2$$

得 $Aq_2=q_1+q_2$. 现在取足够大的正数 τ，使得 τq_1+q_2 的每个分量皆大于 0，则有

$$A\left(\tau q_1+q_2\right)=\left(\tau q_1+q_2\right)+q_1$$
$$A^2\left(\tau q_1+q_2\right)=\left(\tau q_1+q_2\right)+2q_1,\cdots$$

一般地对一切正整数 k 有:

$$A^k\left(\tau q_1+q_2\right)=\left(\tau q_1+q_2\right)+kq_1$$

恒成立. 让 $\tau q_1+q_2=\begin{pmatrix}\theta_1\\\vdots\\\theta_n\end{pmatrix}$，则 $\theta_i>0, i=1,\cdots,n$. 又记

$$A^k=\begin{pmatrix}a_{11}^{(k)}&\cdots&a_{1n}^{(k)}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}^{(k)}&\cdots&a_{nn}^{(k)}\end{pmatrix}.$$

断言: 每个 $a_{ij}^{(k)}$ 皆大于 0，且 A^k 的每一行的行和皆小于等于 1. 为此，使用归约法. 当 $k=1$ 时，由已知条件，结论真. 假设 $k=m-1$ 时结论真，则当 $k=m$ 时，

$$A^m=AA^{m-1}=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11}^{(m-1)}&\cdots&a_{1n}^{(m-1)}\\\vdots&&\vdots\\a_{n1}^{(m-1)}&\cdots&a_{nn}^{(m-1)}\end{pmatrix}$$

于是有

$$a_{11}^{(m)}=a_{11}a_{11}^{(m-1)}+\cdots+a_{1n}a_{n1}^{(m-1)}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{1n}^{(m)}=a_{11}a_{1n}^{(m-1)}+\cdots+a_{1n}a_{nn}^{(m-1)}$$

显然每个 $a_{ij}^{(m)}$ 皆大于 0，且

$$\begin{aligned}&a_{11}^{(m)}+\cdots+a_{1n}^{(m)}\\&=a_{11}\left(\sum_{j=1}^n a_{1j}^{(m-1)}\right)+\cdots+a_{1n}\left(\sum_{j=1}^n a_{nj}^{(m-1)}\right)\\&\le a_{11}\cdot1+\cdots+a_{1n}\cdot1=1\end{aligned}$$

类似可证 A^m 的其他行的元素皆大于 0，且其行和也小于等于 1，从而可知断言为真.

最后，由式子

$$A^k\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_1\\ \vdots\\ \theta_n\end{pmatrix}+kq_1=\begin{pmatrix}\theta_1+k\\ \vdots\\ \theta_n+k\end{pmatrix}$$

可得$a_{11}^{(k)}\theta_1+\cdots+a_{1n}^{(k)}\theta_n=\theta_1+k$. 由$a_{ij}^{(k)}$皆为正数，且$a_{11}^{(k)}+\cdots+a_{1n}^{(k)}\le 1$知，

$$\theta_1+k=a_{11}^{(k)}\theta_1+\cdots+a_{1n}^{(k)}\theta_n\le\theta_1+\cdots+\theta_n$$

即$k\le\theta_2+\cdots+\theta_n$. 此等式右端是一固定值，左端可取任何正整数，矛盾. 至此说明：1的代数重数只能为1.

方法二(使用 **Perron 定理**，该定理超出考试内容范围). 首先证明：对A的任一特征值λ，有$|\lambda|\le 1$. 事实上，对λ，取其一特征向量$v\ne 0$，则$Av=\lambda v$，其中$v=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}\ne 0$.

不妨设$|b_1|=\max\{|b_1|,\cdots,|b_n|\}$. 于是有

$$a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n=\lambda b_1.$$

两边取模得

$$|a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n|=|\lambda||b_1|$$

注意到A的元素皆大于0，故有

$$\begin{aligned}|b_1|&=a_{11}|b_1|+a_{12}|b_1|+\cdots+a_{1n}|b_1|\\&\ge a_{11}|b_1|+a_{12}|b_2|+\cdots+a_{1n}|b_n|\\&\ge|a_{11}b_1+a_{12}b_2+\cdots+a_{1n}b_n|=|\lambda||b_1|.\end{aligned}$$

结果$1\ge|\lambda|$. 这表明：$\rho(A)=1$. 最后由 Perron 定理可知，$\rho(A)$的代数重数与几何重数皆为 1，从而V_1的维数等于 1，其一组基为$\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$.

五、(15 分) 设$I(f)=\int_0^\pi(\sin x-f(x))f(x)\,\mathrm{d}x$，求当遍历$[0,\pi]$上所有连续函数$f$时$I(f)$的最大值.

【参考证明】：对函数配方，有

$$(\sin x-f(x))f(x)=-\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2+\frac{\sin^2 x}{4}$$

代入积分式，得

$$\begin{aligned} I(f) &= \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{4}\mathrm{d}x - \int_0^\pi\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{8} - \int_0^\pi\left(f(x)-\frac{\sin x}{2}\right)^2\mathrm{d}x \end{aligned}$$

故当 $f(x)=\dfrac{\sin x}{2}$ 时，$I(f)$ 取得最大值 $\dfrac{\pi}{8}$.

六、(20 分) 设 $\alpha>1,\Gamma_k=\left[k^\alpha,\left(k+\frac{1}{2}\right)^\alpha\right)\cap\mathbb{N}\,(k\ge 1)$. 试判断级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n$ 的敛散性，其中

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{存在}k\text{使得}n=\min\Gamma_k,\\ \dfrac{1}{n^\alpha}, & \text{其他},\end{cases}\qquad b_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & \text{存在}k\text{使得}n\in\Gamma_k,\\ \dfrac{1}{n^\alpha}, & \text{其他}.\end{cases}$$

【参考证明】: 对任何 $k\ge1$，若 Γ_k 非空，则 $\min\Gamma_k$ 存在，且 $\min\Gamma_k\ge k^\alpha$，故有

$$\sum_{n=1}^\infty a_n \le \sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^\alpha}+\sum_{\substack{1\le k<\infty\\ \Gamma_k\ne 0}}\frac{1}{\min\Gamma_k}\le 2\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n^\alpha}<+\infty$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^\infty a_n$ 收敛. 另一方面，由于

$$\left(k+\frac12\right)^\alpha-k^\alpha=k^\alpha\left(\left(1+\frac{1}{2k}\right)^\alpha-1\right)\ge\frac{\alpha}{2}k^{\alpha-1}>\frac12 k^{\alpha-1}$$

因此，当 $k>K\equiv 4^{\frac{1}{\alpha-1}}$ 时，Γ_k 非空(且至少有两个元素)，此时，若记

$$\Gamma_k=\left\{n_k,n_k+1,\cdots,n_k+\ell_k\right\},$$

则有 $\ell_k+1\ge\frac12 k^{\alpha-1}-1\ge\frac14 k^{\alpha-1}$ 以及 $n_k+\ell_k\le\left(k+\frac12\right)^\alpha$. 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\Gamma_k}\frac1n&=\frac{1}{n_k}+\cdots+\frac{1}{n_k+\ell_k}\ge\frac{\ell_k+1}{n_k+\ell_k}\\ &\ge\frac14k^{\alpha-1}\left(k+\frac12\right)^{-\alpha}=\frac{1}{4k}\left(1+\frac{1}{2k}\right)^{-\alpha}\ge\frac{1}{4k}\left(1+\frac{1}{2K}\right)^{-\alpha}\end{aligned}$$

注意到集合列 $\{\Gamma_k\}$ 两两不交，可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \geq \sum_{n \in \bigcup_{k=K+1}^{\infty} \Gamma_k} b_n = \sum_{k=K+1}^{\infty} \sum_{n \in \Gamma_k} \frac{1}{n}$$
$$\geq \sum_{k=K+1}^{\infty} \frac{1}{4k}\left(1+\frac{1}{2K}\right)^{-\alpha} = +\infty$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散.