第十四届全国大学生数学竞赛决赛试题
及参考解答

（非数学专业类，2023 年 5 月 27 日）

一、填空题(本题满分 30 分，每小题 6 分)

（1） 极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{x-\sin x}=$ ________.

【解】 利用 L'Hospital 法则，得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{x-\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x^2}-1}{1-\cos x}=-\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{x^2}{1-\cos x}=-2.$$

（2）设 $a>0$，则 $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^3}{e^{ax}}\mathrm{d}x=$ ________.

【解】 利用分部积分，得

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^{ax}}\mathrm{d}x=-\frac{1}{a}x^3e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{3}{a}\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{3}{a}\int_0^{+\infty}x^2e^{-ax}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{3}{a^2}x^2e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{6}{a^2}\int_0^{+\infty}xe^{-ax}\mathrm{d}x=\frac{6}{a^2}\int_0^{+\infty}xe^{-ax}\mathrm{d}x$$

$$=-\frac{6}{a^3}xe^{-ax}\Big|_0^{+\infty}+\frac{6}{a^3}\int_0^{+\infty}e^{-ax}\mathrm{d}x=-\frac{6}{a^4}e^{-ax}\Big|_0^{+\infty}=\frac{6}{a^4}.$$

(3) 点 $M_0(2,2,2)$ 关于直线 $L:\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{2}=z-3$ 的对称点 M_1 的坐标为

________.

【解】 过点 $M_0(2,2,2)$ 且垂直于直线 L 的平面 π 的方程为

$$3(x-2)+2(y-2)+z-2=0,\quad 即\quad 3x+2y+z-12=0.$$

将直线 $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+4}{2}=z-3$ 用参数方程可表示为 $x=3t+1,y=2t-4,z=t+3$ 代入平面 π 的方程，得 $3(3t+1)+2(2t-4)+(t+3)-12=0$，解得 $t=1$.

由此可得直线 L 与平面 π 的交点为 $P(4,-2,4)$. 注意到 P 是线段 M_0M_1 的中点，利用中点公式即可解得对称点为 $M_1(6,-6,6)$.

（4）二元函数 $f(x,y)=3xy-x^3-y^3+3$ 的所有极值的和等于__________.

【解】 易知 $\frac{\partial f}{\partial x}=3y-3x^2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=3x-3y^2$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-6x$，$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=3$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-6y$. 令 $\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=0$，解得 $f(x,y)$ 的驻点为 $(0,0)$，$(1,1)$. 因为

$$B^2-AC=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=9-36xy,$$

故在驻点 $(0,0)$ 处，$B^2-AC=9>0$，所以 $f(x,y)$ 不存在极值；在驻点 $(1,1)$ 处，$B^2-AC=-27<0$，且 $A=-6<0$，所以 $f(x,y)$ 取得极大值 $f(1,1)=4$.

因此，函数 $f(x,y)$ 的所有极值的和等于 4.

（5）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n3^n}x^n$ 的收敛域为__________.

【解】 记 $a_n=(-1)^n\frac{1}{n3^n}$，则级数的收敛半径 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=3\lim_{x\to 0}\frac{n}{n+1}=3$.

当 $x=3$ 时，级数成为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$，利用 Leibniz 判别法，可知 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 收敛；

当 $x=-3$ 时，级数成为调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，发散.

因此，原级数的收敛域为 $(-3,3]$.

二、**(本题满分 10 分)** 用正交变换将二次曲面的方程

$$x^2-2y^2-2z^2-4xy+4xz+8yz-27=0$$

化为标准方程, 并说明该曲面是什么曲面.

【解】 设 $A=\begin{pmatrix}1&-2&2\\-2&-2&4\\2&4&-2\end{pmatrix}$，$X=(x,y,z)^{\mathrm T}$，则曲面方程为 $X^{\mathrm T}AX=27$.

易知，A 的特征多项式为 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 2 & -2\\ 2 & \lambda+2 & -4\\ -2 & -4 & \lambda+2\end{vmatrix}=(\lambda-2)^2(\lambda+7)$，所以 A 的特征值为 $\lambda_1=2$(二重)，$\lambda_2=-7$. ------------ 4 分

对于 $\lambda_1=2$，解齐次线性方程组 $(\lambda_1 E-A)X=0$，求得对应的线性无关的特征向量为 $\alpha_1=(-2,1,0)^{\mathrm{T}}$，$\alpha_2=(2,0,1)^{\mathrm{T}}$，利用 Schmidt 正交化方法，得

$$\beta_1=\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0)^{\mathrm{T}}，\quad \beta_2=\frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)^{\mathrm{T}}.$$

对于 $\lambda_2=-7$，解齐次线性方程组 $(\lambda_2 E-A)X=0$，求得对应的单位化特征向量为 $\beta_3=\frac{1}{3}(1,2,-2)^{\mathrm{T}}$. ------------ 3 分

取正交矩阵 $Q=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，令 $X'=(x',y',z')^{\mathrm{T}}$，则正交变换 $X=QX'$ 将曲面的方程 $X^{\mathrm{T}}AX=27$ 可化为如下标准方程

$$2x'^2+2y'^2-7z'^2=27.$$

这是单叶双曲面. ------------ 3 分

【注】 如采用配方法且过程完整有最后结果，可得 5 分.

三、**(本题满分 12 分)** 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上具有二阶连续导数，$f(0)=g(0)=1$，且对 xOy 平面上的任一简单闭曲线 C，曲线积分

$$\oint_C\left[y^2 f(x)+2y\mathrm{e}^x-8yg(x)\right]\mathrm{d}x+2[yg(x)+f(x)]\mathrm{d}y=0,$$

求函数 $f(x)$，$g(x)$.

【解】 记 $P(x,y)=y^2 f(x)+2y\mathrm{e}^x-8yg(x)$，$Q(x,y)=2[yg(x)+f(x)]$. 根据题设条件可知 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$，由此得

$$y[g'(x)-f(x)]+f'(x)+4g(x)-\mathrm{e}^x=0.$$

从而有 $\begin{cases}g'(x)-f(x)=0,\\ f'(x)+4g(x)=\mathrm{e}^x.\end{cases}$ 可得 $g''(x)+4g(x)=\mathrm{e}^x$. ------------ 5 分

这是关于 $g(x)$ 的常系数非齐次二阶线性微分方程，解得

$$g(x)=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x.$$

利用 $g(0)=1$，$g'(0)=f(0)=1$，即 $\begin{cases}C_1+\dfrac{1}{5}=1,\\ 2C_2+\dfrac{1}{5}=1,\end{cases}$ 解得 $C_1=\dfrac{4}{5}$，$C_2=\dfrac{2}{5}$，因此

$$g(x)=\frac{4}{5}\cos 2x+\frac{2}{5}\sin 2x+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x.$$ ------------ 5 分

此外，再由 $g'(x)-f(x)=0$ 即可解得

$$f(x)=-\frac{8}{5}\sin 2x+\frac{4}{5}\cos 2x+\frac{1}{5}\mathrm{e}^x.$$ ------------ 2 分

四、**(本题满分 12 分)** 求由 xOz 平面上的曲线 $\begin{cases}(x^2+z^2)^2=4(x^2-z^2)\\ y=0\end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转而成的曲面所包围区域的体积.

【解】 曲面的方程为：$(x^2+y^2+z^2)^2=4(x^2+y^2-z^2)$. ------------ 2 分

采用球面坐标：$x=\rho\cos\theta\sin\varphi$，$y=\rho\sin\theta\sin\varphi$，$z=\rho\cos\varphi$，曲面的方程可表示为：$\rho=2\sqrt{-\cos 2\varphi}$，$\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{3\pi}{4}\right]$. 根据区域的对称性，得

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2\sqrt{-\cos 2\varphi}}\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho=\frac{32\pi}{3}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi.$$

------------ 4 分

再先后作变量代换：$t=\cos\varphi$，$\sqrt{2}t=\sin u$，得

$$V=\frac{32\pi}{3}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(1-2t^2)^{\frac{3}{2}}\mathrm{d}t=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\mathrm{d}u.$$ ------------ 3 分

利用 Wallis 公式得 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4 u\mathrm{d}u=\dfrac{3}{4}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{3\pi}{16}$，所以

$$V=\frac{16\sqrt{2}\pi}{3}\cdot\frac{3\pi}{16}=\sqrt{2}\pi^2.$$ ------------ 3 分

五、**(本题满分 12 分)** 证明下列不等式：

（1）设 $x\in[0,\pi]$，$t\in[0,1]$，则 $\sin tx\ge t\sin x$；

（2）设 $p>0$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|^p \mathrm{d}u \ge \dfrac{\pi}{2(p+1)}$；

（3）设 $x\ge 0$，$p>0$，则 $\int_0^x |\sin u|^p \mathrm{d}u \ge \dfrac{x|\sin x|^p}{p+1}$.

【解】(1) 令 $F(t)=\sin xt - t\sin x$，则 $F(0)=F(1)=0$，$F''(t)=-x^2\sin xt \le 0$.

当 $x\in[0,\pi]$，$t\in[0,1]$ 时，有 $F(t)\ge 0$，即 $\sin tx \ge t\sin x$. ------------ 3 分

(2) 设 $p>0$，令 $u=\dfrac{\pi}{2}t$，则

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|^p \mathrm{d}u=\frac{\pi}{2}\int_0^1\left|\sin\frac{\pi}{2}t\right|^p \mathrm{d}t \ge \frac{\pi}{2}\int_0^1\left|t\sin\frac{\pi}{2}\right|^p \mathrm{d}t=\frac{\pi}{2(p+1)}.$$

------------ 4 分

(3) 根据对称性，并利用上述结果，得 $\int_0^{\pi}|\sin u|^p \mathrm{d}u=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin u|^p \mathrm{d}u \ge \dfrac{\pi}{p+1}$.

对于 $x\ge 0$，存在非负整数 $k\ge 0$，使得 $x=k\pi+v$，其中 $v\in[0,\pi)$. 根据定积分的周期性特征，有 $\int_0^{k\pi}|\sin u|^p \mathrm{d}u=k\int_0^{\pi}|\sin u|^p \mathrm{d}u$，$\int_{k\pi}^{x}|\sin u|^p \mathrm{d}u=\int_0^{v}|\sin u|^p \mathrm{d}u$.

类似于第(2)题可证，$\int_0^v |\sin u|^p \mathrm{d}u \ge \dfrac{v|\sin v|^p}{p+1}$，因此

$$\int_0^x|\sin u|^p \mathrm{d}u=\int_0^{k\pi}|\sin u|^p \mathrm{d}u+\int_{k\pi}^{x}|\sin u|^p \mathrm{d}u=k\int_0^{\pi}|\sin u|^p \mathrm{d}u+\int_0^{v}|\sin u|^p \mathrm{d}u$$

$$\ge \frac{k\pi}{p+1}+\frac{v|\sin v|^p}{p+1}\ge\frac{x|\sin x|^p}{p+1}.$$ ------------ 5 分

六、**(本题满分 12 分)** 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,\ b]$ 上具有一阶连续导数，证明：$\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x \ge \sqrt{(a-b)^2+[f(a)-f(b)]^2}$，并给出等号成立的条件.

【解】令 $F(t)=\int_a^t\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x-\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}$，则 $F(t)$ 在 $[a,\ b]$ 上连续，在 $(a,\ b)$ 内具有一阶连续导数，且

$$F'(t)=\sqrt{1+[f'(t)]^2}-\frac{(t-a)+[f(t)-f(a)]f'(t)}{\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}}$$ ------------ 5 分

$$=\frac{\sqrt{1+[f'(t)]^2}\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}-[(t-a)+[f(t)-f(a)]f'(t)]}{\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2}}.$$

对任意 $t\in(a,\ b)$，利用 Cauchy 不等式，恒有

$$1\cdot(t-a)+f'(t)[f(t)-f(a)]\le\sqrt{1+[f'(t)]^2}\sqrt{(t-a)^2+[f(t)-f(a)]^2},$$

可知 $F'(t)\ge 0$，所以 $F(t)$ 在 $[a,\ b]$ 上单调递增. 故 $F(b)\ge F(a)=0$，即得所证.

------------ 4 分

进一步, 等号成立当且仅当 $f'(t)=\dfrac{f(t)-f(a)}{t-a}=k$（实常数），即

$$f(t)=f(a)+k(t-a),\quad \forall\, t\in[a,\ b]$$

此时曲线 $y=f(x)$ 为直线. ------------ 3 分

七、**(本题满分 12 分) 证明**级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)\cdot\ln\left(1+\dfrac{1}{2n+1}\right)$ 收敛，并求其和.

【解】 记 $a_n=\ln\dfrac{n+1}{n}$，$n=1,2,\cdots$，则级数化为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}$.

因为 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)\sim x$，所以 $n\to\infty$ 时，有 $a_{2n}a_{2n+1}\sim\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2n(2n+1)}$ 显然收敛，所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}$ 收敛. ------------ 4 分

再求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}$ 的和. 令 $b_n=\sum\limits_{k=n}^{2n-1}a_k^2, n=1,2,\cdots$，则由 $a_n=a_{2n}+a_{2n+1}$ 得

$$b_n-b_{n+1}=a_n^2-a_{2n}^2-a_{2n+1}^2=\left(a_{2n}+a_{2n+1}\right)^2-a_{2n}^2-a_{2n+1}^2=2a_{2n}a_{2n+1}.$$

------------ 4 分

由于 $0<b_n<n\ln^2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$，故由夹逼准则可知 $b_n\to 0(n\to\infty)$. 于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}a_{2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\left(b_n-b_{n+1}\right)=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}(b_1-b_{N+1})=\frac{b_1}{2}=\frac{\ln^2 2}{2}.$$

------------ 4 分