

第十五届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案 (非数学 B 类, 2023 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	30	14	14	14	14	14	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.
3. 如答题空白不够, 可写在当页背面, 并标明题号.

得分	
评阅人	

一、(本题 30 分, 每小题 6 分)

(1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x+2}\right)^{2x-1} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(2) 设 $z = f(x^2 - y^2, xy)$, 且 $f(u, v)$ 有连续的二阶偏导

数,

则 $\frac{\partial z^2}{\partial x \partial y} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(3) 设曲线 $y = \ln(1+ax) + 1$ 与曲线 $y = 2xy^3 + b$ 在 $(0, 1)$ 处相切,

则 $a + b = \underline{\hspace{2cm}}$.

(4) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $y = 1 + \arctan(xy)$ 所决定, 则 $y'(0) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(5) 计算 $\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\cos y}{y} dy = \underline{\hspace{2cm}}$.

解答. (1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{2(x+2)-5} = e^2$.

(2)

$$z_x = 2xf_1 + yf_2,$$

$$z_{xy} = 2x(f_{11}(-2y) + xf_{12}) + f_2 + y(f_{21}(-2y) + xf_{22})$$

$$= f_2 - 4xyf_{11} + 2(x^2 - y^2)f_{12} + xyf_{22}.$$

(3) 易得 $b = 1, a = 2$, 故 $a + b = 3$.

(4) 易得 $y'(x) = \frac{xy'+y}{1+x^2y^2}$. 当 $x = 0$ 时, $y'(0) = 1$.

专业: _____ 座位号: _____ 考场号: _____ 所在院校: _____ 准考证号: _____ 姓名: _____

密封线 答题时不要超过此线

(5) 交换积分顺序, 得

$$\int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\cos y}{y} dy = \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\cos y}{y} dy = \int_0^1 (1-y) \cos y dy = 1 - \cos 1.$$



得分	
评阅人	

二、(本题 14 分) 设曲线 $y = 3ax^2 + 2bx + \ln c$ 经过 $(0,0)$ 点, 且当 $0 \leq x \leq 1$ 时 $y \geq 0$. 设该曲线与直线 $x = 1, x$ 轴所围图形的平面图形 D 的面积为 1. 试求常数 a, b, c 的值, 使得 D 绕 x 轴一周后, 所得旋转体的体积最小.

解答. 由于曲线 $y = 3ax^2 + 2bx + \ln c$ 经过 $(0,0)$ 点, 故 $\ln c = 0, c = 1$. D 的面积 $A = \int_0^1 (3ax^2 + 2bx) dx = a + b = 1$ (4分)
 D 绕 x 轴一周所得到的旋转体体积

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 (3ax^2 + 2bx)^2 dx \\ &= \pi \left(\frac{9}{5}a^2 + 3ab + \frac{4}{3}b^2 \right) \\ &= \pi \left(\frac{2}{15}a^2 + \frac{1}{3}a + \frac{4}{3} \right). \end{aligned}$$

..... (10分)

$$V'(a) = \pi \left(\frac{4}{15}a + \frac{1}{3} \right).$$

不难得到, 当 $a = -\frac{5}{4}$ 时, 旋转体得体积最小, 此时, $b = \frac{9}{4}, c = 1$. . (14分)

注: 推导最小值点时, 用其他办法如配方也可以.

得分	
评阅人	

三、(本题 14 分) 解方程

$$(x^2 + y^2 + 3) \frac{dy}{dx} = 2x(2y - \frac{x^2}{y}).$$

解答. 原方程变形为 $\frac{ydy}{xdx} = \frac{2(2y^2 - x^2)}{x^2 + y^2 + 3}$.

令 $u = x^2, v = y^2$, 则原方程化为 $\frac{dv}{du} = \frac{2(2v - u)}{u + v + 3}$ (5 分)

解方程 $2v - u = 0, u + v + 3 = 0$, 得到 $u = -2, v = -1$, 再令 $U = u + 2, V = v + 1$, 上述方程化为 $\frac{dV}{dU} = \frac{2(2V - U)}{U + V}$ (8 分)

作变量替换 $W = \frac{V}{U}$ 得到 $U \frac{dW}{dU} = -\frac{W^2 - 3W + 2}{W + 1}$ (11 分)

这是分离变量方程, 解之得 $U(W - 2)^3 = C(W - 1)^2$, 回代得

$$(y^2 - 2x^2 - 3)^3 = C(y^2 - x^2 - 1)^2.$$

..... (14 分)

答题时不要超过此线
密封线

得分	
评阅人	

四、(本题 14 分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n(2n-1)}$ 的收敛域及和函数.

解答. 因为 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n(2n-1)}} = 1$, 所以收敛半径为 1.

当 $x = \pm 1$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ 绝对收敛, 故收敛域为 $[-1, 1]$ (5 分)

记该幂级数的和函数为 $S(x)$, 则在 $(-1, 1)$ 上,

$$\frac{1}{2} S''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

..... (9 分)

$$S'(x) = 2 \int_0^x \frac{1}{1+s^2} ds = 2 \arctan x, \quad x \in (-1, 1).$$

$$S(x) = 2 \int_0^x \arctan s ds = 2x \arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in (-1, 1).$$

由于 $S(x)$ 在收敛域上连续, 所以

$$S(x) = 2 \int_0^x \arctan s ds = 2x \arctan x - \ln(1+x^2), \quad x \in [-1, 1].$$

..... (14 分)

得分	
评阅人	

五、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上可导且 $f(0) > 0$, $f(1) > 0$, $\int_0^1 f(x)dx = 0$. 证明:

- (1) $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至少有两个零点;
 (2) 在 $(0, 1)$ 内至少存在一点 ξ , 使得 $f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0$.

证明. (1) 首先我在 $(0, 1)$ 上至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0) < 0$. 否则若对于任意的 $x \in [0, 1]$, $f(x) \geq 0$. $f(x)$ 连续且不恒为零, 故 $\int_0^1 f(x)dx > 0$. 与题设矛盾. (5 分)

其次, 因为 $f(x)$ 连续, 在区间 $[0, x_0]$ 和 $[x_0, 1]$ 上分别应用零点定理知, 存在 $\xi_1 \in (0, x_0)$, $\xi_2 \in (x_0, 1)$ 使得 $f(\xi_1) = 0, f(\xi_2) = 0$ (8 分)

(2) 令 $F(x) = f(x)e^{\int_0^x 3f^2(s)ds}$, 则 F 在 $[0, 1]$ 上连续, $(0, 1)$ 上可导且 $F(\xi_1) = F(\xi_2) = 0$. 由罗尔定理, 存在 $\xi \in (\xi_1, \xi_2) \subset (0, 1)$ 使得 $F'(\xi) = 0$.

又 $F'(x) = (f'(x) + 3f^3(x))e^{\int_0^x 3f^2(s)ds}$, 所以 $f'(\xi) + 3f^3(\xi) = 0$ (14 分)



得分	
评阅人	

六、(本题 14 分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上有连续的导数且 $f(0) = 0$. 求证:

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq 4 \int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx,$$

并求使上式成为等式的 $f(x)$.

解答. 由分部积分法

$$\begin{aligned} \int_0^1 f^2(x)dx &= (x-1)f^2(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-1)2f(x)f'(x)dx \\ &= 2 \int_0^1 (1-x)f'(x) \cdot f(x)dx. \end{aligned}$$

..... (4分)

由 Cauchy 积分不等式, 有

$$\int_0^1 (1-x)f'(x) \cdot f(x)dx \leq \left(\int_0^1 (1-x)^2 (f'(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是

$$\int_0^1 f^2(x)dx \leq 4 \int_0^1 (1-x)^2 |f'(x)|^2 dx.$$

..... (10分)

等式成立时应有常数 c 使得 $(1-x)f'(x) = cf(x)$. 因此当 $x \in (0, 1)$ 时, 有

$$((1-x)^c f(x))' = (1-x)^{c-1} ((1-x)f'(x) - cf(x)) = 0.$$

因而存在常数 d 使得 $f(x) = d(1-x)^{-c}$ ($0 < x < 1$).

当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow 0$, 故 $d = 0$. 于是 $f = 0$. 所以使得题中不等式成为等式的函数是 $f(x) = 0$ (14分)