专业:______ 座位号:______ 考场号:______ 所在院校:______ 准考证号:______ 姓名:______

密封线 答题时不要超过此线

第十六届全国大学生数学竞赛初赛试卷参考答案
(数学 B 类, 2024 年)

考试形式: 闭卷 考试时间: 150 分钟 满分: 100 分

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	20	15	15	20	100
得分							

注意:

1. 所有答题都须写在本试卷指定的答题区域内.
2. 密封线左边请勿答题, 密封线外不得有姓名及相关标记.

得分	
评阅人	

一、 (本题 15 分) 已知单叶双曲面

$$S:\ x^2+y^2-z^2=1. \tag{1}$$

(1) 求 S 上经过 $M_0(1,-1,1)$ 点的两条不同族的直母线方程;

(2) 求 S 上相互垂直的直母线交点的轨迹.

证明. 1. 由方程 (1) 可得

$$(x+z)(x-z)=(1+y)(1-y). \tag{2}$$

由 (2) 可设所求直母线为

$$L_1:\ \begin{cases} u(x+z)=v(1+y), \\ v(x-z)=u(1-y), \end{cases} \qquad L_2:\ \begin{cases} \lambda(x+z)=\mu(1-y), \\ \mu(x-z)=\lambda(1+y), \end{cases} \tag{3}$$

其中, 实数 u,v 不全为零; 实数 μ,λ 不全为零.

.... (3 分)

将 $M_0(1,-1,1)$ 代入 (3), 可得 $u=0$, 以及 $\mu=\lambda\neq 0$, 从而得到

$$L_1:\ \begin{cases} 1+y=0, \\ x-z=0. \end{cases} \qquad L_2:\ \begin{cases} x+z=1-y, \\ x-z=1+y. \end{cases} \tag{4}$$

(即 $L_1: x=\frac{y+1}{0}=z,\quad L_2: \frac{x-1}{0}=y=-z$)

.... (5 分)

2. 因为过单叶双曲面上任意一点，有且仅有两条不同直母线通过它. 不妨设这两条直母线分别为 L_1, L_2, 那么它们的方向向量分别为

$$\mathbf{s}_1 = (v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)$$

和

$$\mathbf{s}_2 = \left(-\mu^2 + \lambda^2, 2\lambda\mu, -\lambda^2 - \mu^2\right).$$

由题设 $\mathbf{s_1}$ 与 $\mathbf{s}_2$ 正交, 则有 $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = 0$, 于是可得

$$(v^2 - u^2)(\lambda^2 - \mu^2) + 4uv\lambda\mu - (u^2 + v^2)(\lambda^2 + \mu^2) = 0. \tag{5}$$

…………………………………………………………… (10 分)

设这两直母线相交于点 $P(X, Y, Z)$，则

$$X^2 + Y^2 - Z^2 = 1. \tag{6}$$

情形 1: 若 $1 + Y \neq 0$，有

$$\begin{cases} u = 1 + Y, \\ v = X + Z, \\ \lambda = X - Z, \\ \mu = 1 + Y. \end{cases} \tag{7}$$

结合 (5), (6) 和 (7) 得

$$(1 + Y)^2 Z^2 = 0. \tag{8}$$

因为 $1 + Y \neq 0$, 由 (8) 可得 $Z = 0$. 再由 (6) 可得 $P(X, Y, Z)$ 的轨迹为

$$X^2 + Y^2 = 1,\ Z = 0.$$

情形 2：若 $1 + Y = 0$, 则 $1 - Y \neq 0$, 于是

$$\begin{cases} u = X - Z, \\ v = 1 - Y, \\ \lambda = 1 - Y, \\ \mu = X + Z. \end{cases}$$

与上面的讨论类似可得 $Z = 0$, 因此所得轨迹为

$$X^2 + Y^2 = 1,\ Z = 0.$$

…………………………………………………………… (15 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $s \geqslant 0$,

$$\varphi(s) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)}\,dx.$$

求 $\varphi(1)$ 和 $\varphi(2)$.

解答. 我们有 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}} = 0$. 因此, 有常数 $C > 0$, 使得

$$\ln(1+x) \leqslant C\sqrt{x}, \qquad \forall\, x > 0.$$

从而,

$$\frac{\ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)} \leqslant C\frac{\sqrt{s}}{1+x^2}, \qquad \forall\, x > 0, s \geqslant 0.$$

因此, 广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)}\,dx$ 关于 $s \in [0,+\infty)$ 内闭一致收敛. 进而 φ 在 $[0,+\infty)$ 上连续.

…………………………………………………………… (2 分)

另一方面, 由

$$\frac{x}{(1+x^2)(1+sx^2)} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{s}(1+x^2)}, \qquad \forall\, x > 0, s > 0$$

可得, 积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+sx^2)}{x(1+x^2)}\,dx$ 形式求导后得到的积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+sx^2)}\,dx$ 关于 $s \in (0,+\infty)$ 内闭一致收敛. 因此, φ 在 $(0,+\infty)$ 内连续可导且

…………………………………………………………… (4 分)

$$\begin{aligned}\varphi'(s) &= \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)(1+sx^2)}\,dx \\ &= \frac{1}{1-s}\int_0^{+\infty} \left(\frac{x}{1+x^2} - \frac{sx}{1+sx^2}\right)dx \\ &= \frac{1}{2(1-s)} \ln \frac{1+x^2}{1+sx^2}\Big|_{x=0}^{+\infty} = -\frac{\ln s}{2(1-s)}.\end{aligned}$$

(上式当 $s = 1$ 时理解为相应的极限, 或不妨只考虑 $s \neq 1$ 的情形)

…………………………………………………………… (8 分)

结合 $\varphi(0)=0$, 得到

$$
\begin{aligned}
\varphi(1) &= -\int_0^1 \frac{\ln s}{2(1-s)}\,ds = -\int_0^1 \frac{\ln(1-s)}{2s}\,ds \\
&= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{\ln(1-s)}{2s}\,ds = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_0^{1-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{n-1}}{2n}\,ds \\
&= \lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{1-\varepsilon}\frac{s^{n-1}}{2n}\,ds = \lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon)^n}{2n^2} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^2} = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}
$$

.... (12 分)

同理,

$$
\begin{aligned}
\varphi(2) &= -\int_0^2 \frac{\ln s}{2(1-s)}\,ds = -\int_{-1}^1 \frac{\ln(1-s)}{2s}\,ds \\
&= -\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-(1-\varepsilon)}^{1-\varepsilon}\frac{\ln(1-s)}{2s}\,ds = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{-(1-\varepsilon)}^{1-\varepsilon}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s^{n-1}}{2n}\,ds \\
&= \lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-(1-\varepsilon)}^{1-\varepsilon}\frac{s^{n-1}}{2n}\,ds = \lim_{\varepsilon\to0^+}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-\varepsilon)^{2n+1}}{(2n+1)^2} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}
$$

.... (15 分)

注. 计算中有多种其它方法, 例如, 可利用

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1+s)}{s}\,ds = \int_0^1 \frac{\ln(1-s^2)-\ln(1-s)}{s}\,ds \\
&= \int_0^1 \frac{\ln(1-s)}{2s}\,ds - \int_0^1 \frac{\ln(1-s)}{s}\,ds = -\int_0^1 \frac{\ln(1-s)}{2s}\,ds;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \frac{\ln(1-s)}{s}\,ds = \lim_{\beta\to1^-}\lim_{\alpha\to0^+}\int_0^1 \frac{(1-s)^\alpha\ln(1-s)}{s^\beta}\,ds \\
&= \lim_{\beta\to1^-}\lim_{\alpha\to0^+}\frac{d}{d\alpha}\int_0^1\frac{(1-s)^\alpha}{s^\beta}\,ds.
\end{aligned}
$$

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

三、(本题 20 分) 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

为实数域 $\mathbb{R}$ 上的 3×3 不可逆方阵. 若 A 的伴随矩阵 A^* 为

$$A^*=\begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 \end{pmatrix},$$

求 A.

解答. (1) 由矩阵 A 不可逆知 $\operatorname{rank}(A^*)=0$ 或 1.

…………………………………………………………… (3 分)

(2) 若 $\operatorname{rank}(A^*)=0$, 则显然有 $A^*=0$, 进而 $A=0$.

…………………………………………………………… (5 分)

(3) 若 $\operatorname{rank}(A^*)=1$, 则 A^* 的任何 2 阶子式皆为 0. 特别地有

$$\begin{vmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{21}^2 & a_{22}^2 \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 \end{vmatrix}=0.$$

于是得到

$$\begin{cases} a_{11}a_{22} &= \pm a_{12}a_{21}, \\ a_{21}a_{32} &= \pm a_{22}a_{31}, \\ a_{12}a_{31} &= \pm a_{11}a_{32}. \end{cases}$$

…………………………………………………………… (8 分)

如果上面三个等式中有某个等式的正号成立, 不妨设 $a_{11}a_{22}=a_{12}a_{21}$, 于是 A 有子式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=0,$$

它是矩阵 A 中元素 a_{33} 的代数余子式, 由伴随矩阵 A^* 的定义得到 $a_{33}^2=0$, 即 $a_{33}=0$. 如果上面三个等式中每个等式出现的都是负号, 则将该三个等式的左右两边分别相乘得

$$a_{11}a_{22}a_{21}a_{32}a_{12}a_{31}=-a_{11}a_{22}a_{21}a_{32}a_{12}a_{31},$$

从而 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, a_{31}, a_{32}$ 中至少有一个为 0. 总之 A^* 至少有一个元素是 0.

. . . . (14 分)

不妨设 $a_{11}^2 = 0$. 若 A^* 的第一列不全为 0, 则由 $\mathrm{rank}(A^*) = 1$ 知 A^* 的第二列和第三列皆可由 A^* 的第一列线性表出, 故 A^* 的第一行元素全部为 0. 从而 A^* 有一整行元素全为 0 或有一整列元素全为 0. 相应地, A 也有一整行元素全为 0 或有一整列元素全为 0. 不妨设 A 的第一行元素全为 0, 此时 A 的其它元素的代数余子式全为 0, 故 $a_{22}^2 = a_{23}^2 = a_{32}^2 = a_{33}^2 = 0$. 这表明在矩阵 A 中有 $a_{22} = a_{23} = a_{32} = a_{33} = 0$, 所以矩阵 A 的元素 a_{12} 和 a_{13} 的代数余子式都是 0, 由 A^* 的定义得到 $a_{21}^2 = a_{31}^2 = 0$, 这导致 $A^* = 0$, 与 $\mathrm{rank}(A^*) = 1$ 矛盾. 故我们总有 $A = 0$.

. . . . (20 分)

专业: 座位号: 考场号: 所在院校: 准考证号: 姓名:

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

四、 (本题 15 分) 设 $f(x)$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上没有零点的实连续函数. 若 $f(2023)+f(2024)=2025$, 证明: 对任意 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$, 均有矩阵

$$A=\begin{pmatrix} 1+f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ f(x_1) & 1+f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & 1+f(x_n) \end{pmatrix}$$

为可逆矩阵.

证明. 法 I. (1) 由 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有零点且连续可得 $f(x)$ 恒正或恒负, 又由 $f(2023)+f(2024)=2025$ 知 $f(x)$ 恒正.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4 分)

(2) 计算矩阵 A 的行列式有

$$\begin{aligned}|A|=&\left|E-\begin{pmatrix}-1\\-1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n)\end{pmatrix}\right|\\ =&\left|1-\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\-1\\\vdots\\-1\end{pmatrix}\right|\\ =&1+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n),\end{aligned}$$

注意到由 (1) 知 $f(x)$ 恒正, 故 $|A|=1+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)>0$, 所以 A 可逆.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (15 分)

法 II. (1) 由 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有零点且连续可得 $f(x)$ 恒正或恒负, 又由 $f(2023)+f(2024)=2025$ 知 $f(x)$ 恒正.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4 分)

(2) 设 $\alpha=(1,1,\cdots,1)^T$, $\beta=(f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n))$, 则 $A=E+\alpha\beta$, 其中 E 为 n 阶单位矩阵. 由于 $\alpha\beta$ 与 $\beta\alpha=f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ 有相同的非

零特征值, 由 $f(x)$ 恒正得到 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)>0$, 所以 $\alpha\beta$ 的特征值为 $f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ (一重) 和 0 ($n-1$ 重). 所以 A 的特征值为 $1+f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)$ (一重) 和 1 ($n-1$ 重), 它们均不为 0, 所以 A 可逆.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (15 分)

法 III. (1) 由 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上没有零点且连续可得 $f(x)$ 恒正或恒负, 又由 $f(2023)+f(2024)=2025$ 知 $f(x)$ 恒正.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (4 分)

(2) 反证, 若 A 不可逆, 则 A 有 0 作为其特征值. 现设 $v=(a_1,a_2,\cdots,a_n)^T\neq 0$ 为 A 关于 0 的一个特征向量. 于是有

$$\begin{pmatrix} f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f(x_1) & f(x_2) & \cdots & f(x_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}=-\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

故

$$a_1f(x_1)+a_2f(x_2)+\cdots+a_nf(x_n)=-a_1=-a_2=\cdots=-a_n.$$

结果 $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (10 分)

令 $a=a_1$, 则有 $a\neq 0$. 再次由 $Av=0$ 得

$$(1+f(x_1))a+(f(x_2)+\cdots+f(x_n))a=0,$$

进而

$$1+f(x_1)+\cdots+f(x_n)=0.$$

与 (1) 中所证 $f(x)$ 恒正矛盾, 所以 A 可逆.

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$ (15 分)

专业:________ 座位号:________ 考场号:________ 所在院校:________ 准考证号:________ 姓名:________

密封线 答题时不要超过此线

得分	
评阅人	

五、 (本题 15 分) 对于 $n \geqslant 2$, 记

$$E_n = \left\{k \in \mathbb{N} \middle| 1 \leqslant k^2 \leqslant n\right\},$$
$$F_n = \left\{\sqrt{k} \middle| 1 \leqslant k \leqslant n,\, k \in \mathbb{N},\, \sqrt{k} \notin \mathbb{N}\right\}.$$

令 A_n, B_n 依次为 E_n, F_n 中所有元素之和. 计算极限 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 和 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{B_n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 并说明理由, 其中 $\mathbb{N}$ 为自然数集.

证明. 易见 E_n 中元素个数和每个元素的值均不超过 $[\sqrt{n}] \leqslant \sqrt{n}$. 因此, $0 \leqslant A_n \leqslant n$. 从而 $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{A_n}{n^{\frac{3}{2}}} = 0$.

.... (8 分)

进一步, 易见

$$\begin{aligned} E_n &= \left\{\sqrt{k} \middle| 1 \leqslant k \leqslant n,\, k \in \mathbb{N},\, \sqrt{k} \in \mathbb{N}\right\} \\ &= \left\{\sqrt{k} \middle| 1 \leqslant k \leqslant n,\, k \in \mathbb{N}\right\} \setminus F_n. \end{aligned}$$

因此, 结合 Stolz 公式, 得到

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{n^{\frac{3}{2}}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k} - A_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{3}{2}} - (n-1)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{-1}}{1 - (1-n^{-1})^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

这也可以利用定积分得到

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{B_n}{n^{\frac{3}{2}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \sqrt{k}}{n^{\frac{3}{2}}} = \int_0^1 \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3}.$$

.... (15 分)

得分	
评阅人	

六、 (本题 20 分) 设 $\alpha>0$ 是常数. 又设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 为正数列且满足 $x_1=2024$, $y_1=20251109$, $x_{n+1}+x_{n+1}^{1+\alpha}=x_n$, $y_{n+1}+2^{-\alpha}y_{n+1}^{1+\alpha}\leqslant y_n\,(n\geqslant 1)$.

(1) 证明 $\{nx_n^{\alpha}\}$ 收敛并求极限. (2) 证明: $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} ny_n^{\alpha}\leqslant\dfrac{2^{\alpha}}{\alpha}$.

解答. 令 $f(x)=x+x^{1+\alpha}\,(x\geqslant 0)$. 则 f 在 $[0,+\infty)$ 上严格单增, 取值于 $[0,+\infty)$.

(1) 由 f 的上述性质易见 x_{n+1} 是 $f(x)=x_n$ 的唯一解, 且 $x_{n+1}<x_n\,(n\geqslant 1)$. 因此, $\{x_n\}$ 收敛于某个 $\bar{x}\geqslant 0$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (3 分)

进一步, 有 $\bar{x}+\bar{x}^{1+\alpha}=\bar{x}$. 从而 $\bar{x}=0$. 即 $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$.

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (6 分)

从而, 由 Stolz 公式, 可得

$$\lim_{n\to+\infty} nx_n^{\alpha}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{x_n^{-\alpha}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_{n+1}^{-\alpha}-x_n^{-\alpha}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{x_{n+1}^{-\alpha}-\left(x_{n+1}+x_{n+1}^{1+\alpha}\right)^{-\alpha}}$$
$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{-\alpha}-\left(x+x^{1+\alpha}\right)^{-\alpha}}=\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\alpha}}{1-\left(1+x^{\alpha}\right)^{-\alpha}}=\frac{1}{\alpha}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (14 分)

(2) 令 $y_n=2Y_n\,(n\geqslant 1)$. 则 $\{Y_n\}$ 为正数列且满足 $Y_1=1012500$, $f(Y_{n+1})\leqslant Y_n\,(n\geqslant 1)$.

法 I. 令 $X_1=Y_1$, $f(X_{n+1})=X_n\,(n\geqslant 1)$. 则归纳可证 $Y_n\leqslant X_n\,(n\geqslant 1)$. 而从 (1) 的证明可见, 同样有 $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n}{X_n^{-\alpha}}=\dfrac{1}{\alpha}$.

因此,

$$\varlimsup_{n\to+\infty} ny_n^{\alpha}=\varlimsup_{n\to+\infty}2^{\alpha}nY_n^{\alpha}\leqslant\lim_{n\to+\infty}2^{\alpha}nX_n^{\alpha}=\frac{2^{\alpha}}{\alpha}.$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (20 分)

法 II. 类似 (1) 可证 $\{Y_n\}$ 严格单减趋于零. 从而推广 Stolz 定理, 可得

$$\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{n}{y_n^{-\alpha}}=2^{\alpha}\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{n}{Y_n^{-\alpha}}\leqslant 2^{\alpha}\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{Y_{n+1}^{-\alpha}-Y_n^{-\alpha}}$$
$$\leqslant 2^{\alpha}\varlimsup_{n\to+\infty}\frac{1}{Y_{n+1}^{-\alpha}-\left(Y_{n+1}+Y_{n+1}^{1+\alpha}\right)^{-\alpha}}=2^{\alpha}\lim_{x\to0^+}\frac{1}{x^{-\alpha}-\left(x+x^{1+\alpha}\right)^{-\alpha}}$$
$$=2^{\alpha}\lim_{x\to0^+}\frac{x^{\alpha}}{1-\left(1+x^{\alpha}\right)^{-\alpha}}=\frac{1}{\alpha}$$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$ (20 分)